

Formulario de Precálculo.

1. Los Números.

1. Clasificación de los números.

Los números se clasifican como:

a) NATURALES: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$

b) ENTEROS:

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty\}$$

$$= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \infty\}$$

$$\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$$

c) RACIONALES: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$

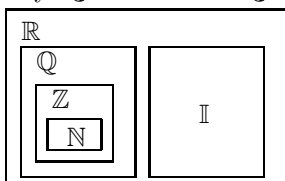
Propiedades de los racionales:

1) Si $\frac{a}{b}$ se escribe en forma decimal, entonces, su parte decimal es finita. $\frac{5}{10} = 0.5$

2) Si $\frac{a}{b}$ se escribe en forma decimal, entonces, su parte decimal es periódica. $\frac{10}{3} = 3.\bar{3}$

d) IRRACIONALES: $\mathbb{I} = \{x : x \text{ es un número con parte decimal infinita y no periódica}\}$

e) REALES: Se representan con $\mathbb{R}$ y es cualquiera de números anteriores. Se cumple: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.



2. Propiedades de los números reales.

a) **Los reales son un Campo.** Porque se cumplen las propiedades:

1) BAJO LA SUMA:

• La suma es conmutativa:

$$a + b = b + a$$

• La suma es asociativa:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

• La IDENTIDAD ADITIVA O NEUTRO ADITIVO es el cero:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

• $-a$ es el INVERSO ADITIVO de a :

$$a + (-a) = -a + a = 0$$

Al sumar a con su inverso aditivo $-a$ se obtiene el neutro aditivo.

2) BAJO LA MULTIPLICACIÓN:

• La multiplicación es conmutativa:

$$ab = ba$$

• La multiplicación es asociativa:

$$a(bc) = (ab)c$$

• La IDENTIDAD MULTIPLICATIVA es el 1:

$$a1 = 1a = a$$

• Sea $a \neq 0$, entonces, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ es el INVERSO MULTIPLICATIVO O RECÍPROCO de a :

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

Al multiplicar a con su recíproco a^{-1} obtenemos la identidad multiplicativa.

3) LEY DISTRIBUTIVA:

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{y} \quad (a + b)c = ac + bc$$

b) **Los números reales tienen un orden.**

Comenzamos con cinco relaciones de orden definidas sobre los reales.

1) La relación $<$ menor que.

2) La relación $>$ mayor que.

3) La relación $\leq$ menor o igual que.

4) La relación $\geq$ mayor o igual que.

5) La relación $=$ de igualdad.

Decimos que:

1) $a < b$ y $b > a$ significan lo mismo, es decir, $b - a$ es un número positivo y distinto de cero.

2) $a \leq b$ y $b \geq a$ significan lo mismo, es decir, $b - a$ es un número positivo o es cero.

• LEY DE TRICOTOMÍA: Si a y b son números reales, entonces: $a < b$ o $a = b$ o $a > b$

• Para las cinco relaciones de orden se cumplen las siguientes propiedades:

1) **Transitiva:** Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\text{Si } a < b \text{ y } b < c \Rightarrow a < c.$$

$$\text{Si } a > b \text{ y } b > c \Rightarrow a > c.$$

$$\text{Si } a \leq b \text{ y } b \leq c \Rightarrow a \leq c.$$

$$\text{Si } a \geq b \text{ y } b \geq c \Rightarrow a \geq c.$$

$$\text{Si } a = b \text{ y } b = c \Rightarrow a = c.$$

2) **Aditiva:** Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\text{Si } a < b \Rightarrow a + c < b + c.$$

$$\text{Si } a > b \Rightarrow a + c > b + c.$$

$$\text{Si } a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c.$$

$$\text{Si } a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c.$$

$$\text{Si } a = b \Rightarrow a + c = b + c.$$

3) **Multiplcativa:**

★ PARA LA IGUALDAD.

Para cualquier $c \in \mathbb{R}$:

$$\text{Si } a = b \Rightarrow ac = bc.$$

★ PARA LAS DESIGUALDADES.

Caso 1. Sea $c > 0$, entonces:

$$\text{Si } a < b \Rightarrow ac < bc.$$

$$\text{Si } a > b \Rightarrow ac > bc.$$

$$\text{Si } a \leq b \Rightarrow ac \leq bc.$$

$$\text{Si } a \geq b \Rightarrow ac \geq bc.$$

Caso 2. Sea $c < 0$, entonces:

$$\text{Si } a < b \Rightarrow ac > bc.$$

$$\text{Si } a > b \Rightarrow ac < bc.$$

$$\text{Si } a \leq b \Rightarrow ac \geq bc.$$

$$\text{Si } a \geq b \Rightarrow ac \leq bc.$$

3. Valor Absoluto. Para cualquier número real a , se define como:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0, \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que:

- a) $|-a| = |a|$
- b) $|ab| = |a||b|$
- c) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
- d) $|a^n| = |a|^n$
- e) $|a+b| \leq |a| + |b|$ Desigualdad del Triángulo.
- f) Si $|a| < b \Rightarrow -b < a < b$
- g) Si $|a| > b \Rightarrow a > b \text{ o } a < -b$

4. Propiedades de Desigualdades.

Si $0 < a < b$, se cumple:

- a) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$
- b) $0 < a^2 < b^2$
- c) $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$

5. Leyes de los exponentes y radicales.

- a) $a^m a^n = a^{m+n}$
- b) $(a^m)^n = a^{mn}$
- c) $(ab)^n = a^n b^n$
- d) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- e) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- f) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- g) $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
- h) $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$
- i) $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$
- j) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$
- k) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- l) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

6. Productos Notables.

- a) Binomios Conjugados: $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
- b) Binomio al Cuadrado: $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$
- c) Binomio al Cubo: $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$
- d) $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
- e) $(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$
- f) $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$
- g) $(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

Todos los resultados previos se pueden obtener al utilizar el Teorema del Binomio.

7. Teorema del Binomio. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

Nota: $\binom{n}{r} = {}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

8. Factores Notables.

- a) Diferencia de Cuadrados: $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
- b) Suma de Cubos: $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
- c) Diferencia de Cubos: $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
- d) Trinomio Cuadrado Perfecto: $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$
- e) $x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2)$
- f) $x^5 - y^5 = (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$
- g) $x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$
- h) $x^6 - y^6 = (x-y)(x+y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$
- i) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$
- j) $x^4 + 4y^4 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$

9. Leyes de los logaritmos.

- a) $\log_a(PQ) = \log_a(P) + \log_a(Q)$
- b) $\log_a\left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a(P) - \log_a(Q)$
- c) $\log_a(Q^n) = n \log_a(Q)$
- d) $a^{\log_a(x)} = x$
- e) $\log_a(a^x) = x$
- f) $\log_a(1) = 0$
- g) $\log_a(a) = 1$
- h) $\log(x) = \log_{10}(x)$
- i) $\ln(x) = \log_e(x)$
- j) Cambio de base: $\log_a(Q) = \frac{\log_b(Q)}{\log_b(a)}$

10. Completar Trinomio Cuadrado Perfecto.

Al trinomio (que no es cuadrado perfecto) $x^2 \pm kx + c = 0$ se le suma $\left(\frac{k}{2}\right)^2$ y queda como $\left(x \pm \frac{k}{2}\right)^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 - c$

11. Números Complejos. El conjunto de los números complejos se representan con $\mathbb{C}$. Un número complejo z tiene la forma: $a+bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, i es la *Unidad Imaginaria*. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

$$i^n = 1, \text{ si } n \div 4 \text{ es exacto}$$

$$i^n = -1, \text{ si } n \div 4 = \square.5$$

$$i^n = i, \text{ si } n \div 4 = \square.25$$

$$i^n = -i, \text{ si } n \div 4 = \square.75$$

también se cumple:

$$i^{-n} = i^n, \text{ para } n = \text{par}$$

$$i^{-n} = -(i^n), \text{ para } n = \text{impar}$$

- Si $z = bi$, z se llama **Número Imaginario Puro**.
- Si $z = a$, z se llama **Número Real**.
- Si $z = a + bi$, z se llama **Número Complejo**.
- Sea $z = a + bi$, entonces, definimos su **CONJUGADO** como: $\bar{z} = a - bi$.
- Sea $z = a + bi$, entonces, definimos su **MÓDULO** como: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

• Sea $z = a + bi$, entonces, definimos:

★ la parte **REAL** de z se define como: $\text{Re}(z) = a$,

★ la parte **IMAGINARIA** de z se define como: $\text{Im}(z) = b$.

La parte imaginaria es sólo b , NO SE INCLUYE A i .

• **Los números complejos son un campo.**

La suma y multiplicación de números complejos es *conmutativa*: $z + w = w + z$, $zw = wz$.

La suma y multiplicación de números complejos es *asociativa*: $z + (v + w) = (z + v) + w$, $z(vw) = (zv)w$.

El cero es el *elemento neutro* de la suma: $z + 0 = 0 + z = z$.

El *elemento identidad* de la multiplicación es 1: $z1 = 1z = z$.

• $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ es *inverso multiplicativo* de z .

• Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces, se cumple que:

a) $z + \bar{z} = 2a$

b) $z - \bar{z} = 2bi$

c) $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

d) $\bar{\bar{z}} = z$

e) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

f) $|z| = |\bar{z}|$

g) $|zw| = |z||w|$

h) $\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

i) $\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

• Sea $k \in \mathbb{R}$, entonces: $kz = ka + kbi$

• Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces:

a) Suma: $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

b) Resta: $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

c) Multiplicación: $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

d) División:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} \\ &= \frac{(ac + bd) + (cb - ad)i}{c^2 + d^2} \\ &= \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + \left(\frac{cb - ad}{c^2 + d^2} \right)i \end{aligned}$$

Nota: $\frac{z_1}{z_2} \pm \frac{z_3}{z_4} \neq \frac{z_1 z_4 \pm z_3 z_2}{z_2 z_4}$

primero se calculan las divisiones de $z_1 \div z_2$ y de $z_3 \div z_4$; para después sumar o restar.

12. Soluciones Exactas de Ecuaciones Algebraicas.

a) La **Ecuación Cuadrática**: $ax^2 + bx + c = 0$ tiene soluciones:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El número $b^2 - 4ac$ se llama *discriminante* de la ecuación.

i) Si $b^2 - 4ac > 0$ las raíces son reales y diferentes.

ii) Si $b^2 - 4ac = 0$ las raíces son reales e iguales.

iii) Si $b^2 - 4ac < 0$ las raíces son complejas conjugadas.

b) Para la **Ecuación Cúbica**: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ sean:

$$Q = \frac{3b - a^2}{9}, \quad R = \frac{9ab - 27c - 2a^3}{54}$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}, \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

Entonces las soluciones son:

$$x_1 = S + T - \frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\left(\frac{S+T}{2} + \frac{a}{3}\right) + \left(\frac{(S-T)\sqrt{3}}{2}\right)i$$

$$x_3 = -\left(\frac{S+T}{2} + \frac{a}{3}\right) - \left(\frac{(S-T)\sqrt{3}}{2}\right)i$$

El número $Q^3 + R^2$ se llama *discriminante* de la ecuación.

i) Si $Q^3 + R^2 > 0$, hay una raíz real y dos son complejas conjugadas.

ii) Si $Q^3 + R^2 = 0$, las raíces son reales y por lo menos dos son iguales.

iii) Si $Q^3 + R^2 < 0$, las raíces son reales y diferentes.

2. Funciones Trigonómicas.

2.1. Funciones Recíprocas.

$\csc(A) = \frac{1}{\sin(A)}$	$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$
$\sec(A) = \frac{1}{\cos(A)}$	$\sec^2(A) - \tan^2(A) = 1$
$\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)}$	$\csc^2(A) - \cot^2(A) = 1$
$\cot(A) = \frac{\cos(A)}{\sin(A)} = \frac{1}{\tan(A)}$	

2.2. Fórmulas de Adición.

$$\sin(A \pm B) = \sin(A) \cos(B) \pm \cos(A) \sin(B)$$

$$\cos(A \pm B) = \cos(A) \cos(B) \mp \sin(A) \sin(B)$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan(A) \pm \tan(B)}{1 \mp \tan(A) \tan(B)}$$

$$\cot(A \pm B) = \frac{\cot(A) \cot(B) \mp 1}{\cot(A) \pm \cot(B)}$$

$$\sin(x \pm 2k\pi) = \sin(x) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x \pm 2k\pi) = \cos(x) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$$

$$\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$$

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos(x)$$

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin(x)$$

2.3. Fórmulas de Medio Ángulo.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(A)}{2}} \quad \begin{cases} \text{es } + \text{ si } \frac{A}{2} \in \{\text{I ó II}\} \\ \text{es } - \text{ si } \frac{A}{2} \in \{\text{III ó IV}\} \end{cases} \\ \cos\left(\frac{A}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(A)}{2}} \quad \begin{cases} \text{es } + \text{ si } \frac{A}{2} \in \{\text{I ó IV}\} \\ \text{es } - \text{ si } \frac{A}{2} \in \{\text{II ó III}\} \end{cases}\end{aligned}$$

2.4. Fórmulas de Ángulo Doble.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2A) &= 2 \operatorname{sen}(A) \cos(A) \\ \cos(2A) &= \cos^2(A) - \operatorname{sen}^2(A) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2(A) = 2 \cos^2(A) - 1 \\ \tan(2A) &= \frac{2 \tan(A)}{1 - \tan^2(A)}\end{aligned}$$

2.5. Potencias de Funciones Trigonómicas.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2(A) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2A) \\ \cos^2(A) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2A) \\ \operatorname{sen}^3(A) &= \frac{3}{4} \operatorname{sen}(A) - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(3A)\end{aligned}$$

$$\cos^3(A) = \frac{3}{4} \cos(A) + \frac{1}{4} \cos(3A)$$

$$\operatorname{sen}^4(A) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2A) + \frac{1}{8} \cos(4A)$$

$$\cos^4(A) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2A) + \frac{1}{8} \cos(4A)$$

2.6. Suma, Diferencia y Producto las Funciones Trigonómicas.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(A) + \operatorname{sen}(B) &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\ \operatorname{sen}(A) - \operatorname{sen}(B) &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \\ \cos(A) + \cos(B) &= 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\ \cos(A) - \cos(B) &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{B-A}{2}\right) \\ \operatorname{sen}(A) \operatorname{sen}(B) &= \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\ \cos(A) \cos(B) &= \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ \operatorname{sen}(A) \cos(B) &= \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)]\end{aligned}$$

3. Funciones Hiperbólicas.

$$\begin{aligned}\operatorname{senh}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \tanh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \operatorname{csch}(x) &= \frac{2}{e^x - e^{-x}} & \operatorname{sech}(x) &= \frac{2}{e^x + e^{-x}} & \coth(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\end{aligned}$$

3.1. Relación entre las Funciones Hiperbólicas.

$$\begin{aligned}\tanh(x) &= \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} & \operatorname{sech}(x) &= \frac{1}{\cosh(x)} & \cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) &= 1 \\ \coth(x) &= \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} & \operatorname{csch}(x) &= \frac{1}{\operatorname{senh}(x)} & \operatorname{sech}^2(x) + \tanh^2(x) &= 1 \\ & & & & \coth^2(x) - \operatorname{csch}^2(x) &= 1\end{aligned}$$

3.2. Fórmulas de Adición.

$$\begin{aligned}\operatorname{senh}(A \pm B) &= \operatorname{senh}(A) \cosh(B) \pm \cosh(A) \operatorname{senh}(B) \\ \cosh(A \pm B) &= \cosh(A) \cosh(B) \pm \operatorname{senh}(A) \operatorname{senh}(B) \\ \tanh(A \pm B) &= \frac{\tanh(A) \pm \tanh(B)}{1 \pm \tanh(A) \tanh(B)} \\ \coth(A \pm B) &= \frac{\coth(A) \coth(B) \pm 1}{\coth(A) \pm \coth(B)}\end{aligned}$$

3.3. Fórmulas de Medio Ángulo.

$$\begin{aligned}\operatorname{senh}\left(\frac{A}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{\cosh(A) - 1}{2}} \quad \begin{cases} \text{es } + \text{ si } A > 0 \\ \text{es } - \text{ si } A < 0 \end{cases} \\ \cosh\left(\frac{A}{2}\right) &= \sqrt{\frac{\cosh(A) + 1}{2}}\end{aligned}$$

3.4. Potencias de Funciones Hiperbólicas.

$$\begin{aligned}\operatorname{senh}^2(A) &= \frac{1}{2} \cosh(2A) - \frac{1}{2} \\ \cosh^2(A) &= \frac{1}{2} \cosh(2A) + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

3.5. Fórmulas de Ángulo Doble.

$$\begin{aligned}\operatorname{senh}(2A) &= 2 \operatorname{senh}(A) \cosh(A) \\ \cosh(2A) &= \cosh^2(A) + \operatorname{senh}^2(A) \\ &= 2 \cosh^2(A) - 1 \\ &= 1 + 2 \operatorname{senh}^2(A)\end{aligned}$$

4. Relación entre las Funciones Hiperbólicas y las Trigonométricas.

1. $\sin(ix) = i \sinh(x)$	4. $\csc(ix) = -i \operatorname{csch}(x)$	7. $\sinh(ix) = i \sin(x)$	10. $\operatorname{csch}(ix) = -i \csc(x)$
2. $\cos(ix) = \cosh(x)$	5. $\sec(ix) = \operatorname{sech}(x)$	8. $\cosh(ix) = \cos(x)$	11. $\operatorname{sech}(ix) = \sec(x)$
3. $\tan(ix) = i \tanh(x)$	6. $\cot(ix) = -i \coth(x)$	9. $\tanh(ix) = i \tan(x)$	12. $\coth(ix) = -i \cot(x)$

.....Formulario de Cálculo para Derivadas.....

En este formulario: $k, c \in \mathbb{R}$, son constantes reales; $f = f(x)$, $f = \tan(u)$
 $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son funciones que dependen de x .

Fórmulas Básicas:

Función: Su Derivada:

$$f = k \quad f' = 0$$

Linealidad de la derivada:

Función: Su Derivada:

$$f = k \cdot u \quad f' = k \cdot u'$$

$$f = u \pm v \quad f' = u' \pm v'$$

$$f = k \cdot u \pm c \cdot v \quad f' = k \cdot u' \pm c \cdot v'$$

Regla del Producto:

Función: Su Derivada:

$$f = u \cdot v \quad f' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

Regla del Cociente:

Función: Su Derivada:

$$f = \frac{u}{v} \quad f' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

Regla de la Cadena (Composición de funciones)

Función: Su Derivada:

$$f = u(x) \circ v(x) \quad f' = [u(v(x))]' \cdot v'(x)$$

Regla de la Potencia:

$$f = v^n \quad f' = n \cdot v^{n-1} \cdot v'$$

Funciones Exponenciales:

Función: Su Derivada:

$$f = e^u \quad f' = e^u \cdot u'$$

$$f = a^u \quad f' = a^u \cdot \ln(a) \cdot u'$$

Funciones Logarítmicas:

Función: Su Derivada:

$$f = \ln(u) \quad f' = \frac{u'}{u}$$

$$f = \log_a(u) \quad f' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)}$$

Una Función elevada a otra Función:

Función: Su Derivada:

$$f = u^v \quad f' = u^v \left[v' \cdot \ln(u) + \frac{v \cdot u'}{u} \right]$$

Funciones Trigonométricas:

Función: Su Derivada:

$$f = \sin(u) \quad f' = \cos(u) \cdot u'$$

$$f = \cos(u) \quad f' = -\sin(u) \cdot u'$$

$$f' = \sec^2(u) \cdot u'$$

$$f = \csc(u) \quad f' = -\csc(u) \cot(u) \cdot u'$$

$$f = \sec(u) \quad f' = \sec(u) \tan(u) \cdot u'$$

$$f = \cot(u) \quad f' = -\csc^2(u) \cdot u'$$

Funciones Trigonométricas Inversas:

Función: Su Derivada:

$$f = \arcsen(u) \quad f' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad |u| < 1$$

$$f = \arccos(u) \quad f' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad |u| < 1$$

$$f = \arctan(u) \quad f' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$f = \operatorname{arccsc}(u) \quad f' = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$f = \operatorname{arcsec}(u) \quad f' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}; \quad |u| > 1$$

$$f = \operatorname{arccot}(u) \quad f' = -\frac{u'}{1+u^2}; \quad |u| > 1$$

Funciones Hiperbólicas:

Función: Su Derivada:

$$f = \sinh(u) \quad f' = \cosh(u) \cdot u'$$

$$f = \cosh(u) \quad f' = \sinh(u) \cdot u'$$

$$f = \tanh(u) \quad f' = \operatorname{sech}^2(u) \cdot u'$$

$$f = \operatorname{csch}(u) \quad f' = -\operatorname{csch}(u) \coth(u) \cdot u'$$

$$f = \operatorname{sech}(u) \quad f' = -\operatorname{sech}(u) \tanh(u) \cdot u'$$

$$f = \coth(u) \quad f' = -\operatorname{csch}^2(u) \cdot u'$$

Funciones Hiperbólicas Inversas:

Función: Su Derivada:

$$f = \operatorname{arcsenh}(u) \quad f' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$f = \operatorname{arccosh}(u) \quad f' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}; \quad |u| > 1$$

$$f = \operatorname{arctanh}(u) \quad f' = \frac{u'}{1-u^2}; \quad |u| < 1$$

$$f = \operatorname{arccsch}(u) \quad f' = -\frac{u'}{|u|\sqrt{1+u^2}}; \quad u \neq 0$$

$$f = \operatorname{arcsech}(u) \quad f' = -\frac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}; \quad 0 < u < 1$$

$$f = \operatorname{arccoth}(u) \quad f' = \frac{u'}{1-u^2}; \quad |u| > 1$$

Formulario de Cálculo para Integrales.

En este formulario: $k, w, C \in \mathbb{R}$, son constantes reales; $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son funciones que dependen de x .

Fórmulas Básicas.

- 1) $\int 0 dx = C$
- 2) $\int k dx = kx + C$
- 3) $\int (k \cdot u \pm w \cdot v) dx = k \int u dx \pm w \int v dx + C$
- 4) $\int u du = \frac{u^2}{2} + C.$
- 5) Regla de la potencia $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ para $n \neq -1$.
- 6) Regla exponencial $\int e^u du = e^u + C$
- 7) Regla logarítmica $\int \ln |u| du = u \ln |u| - u + C$
- 8) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$
- 9) $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$
- 10) Integral por partes: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du + C$

Trigonométricas.

- 11) $\int \sin u du = -\cos u$
- 12) $\int \cos u du = \sin u$
- 13) $\int \tan u du = \ln[\sec u] = -\ln[\cos u]$
- 14) $\int \cot u du = \ln \sin u$
- 15) $\int \sec u du = \ln[\sec u + \tan u] = \ln \left[\tan \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$
- 16) $\int \csc u du = \ln[\csc u - \cot u] = \ln \left[\tan \frac{u}{2} \right]$
- 17) $\int \sec^2 u du = \tan u$
- 18) $\int \csc^2 u du = -\cot u$
- 19) $\int \tan^2 u du = \tan u - u$
- 20) $\int \cot^2 u du = -\cot u - u$
- 21) $\int \sin^2 u du = \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} = \frac{1}{2}[u - \sin u \cos u]$
- 22) $\int \cos^2 u du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} = \frac{1}{2}[u + \sin u \cos u]$
- 23) $\int \sec u \tan u du = \sec u$
- 24) $\int \csc u \cot u du = -\csc u$

Hiperbólicas.

- 25) $\int \sinh u du = \cosh u$
- 26) $\int \cosh u du = \sinh u$
- 27) $\int \tanh u du = \ln[\cosh u]$
- 28) $\int \coth u du = \ln[\sinh u]$
- 29) $\int \operatorname{sech} u du = \operatorname{sen}^{-1}[\tanh u] = 2 \tan^{-1}[e^u]$
- 30) $\int \operatorname{csch} u du = \ln \left[\tanh \frac{u}{2} \right] = -2 \coth^{-1}[e^u]$
- 31) $\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u$
- 32) $\int \operatorname{csch}^2 u du = -\coth u$
- 33) $\int \tanh^2 u du = u - \tanh u$
- 34) $\int \coth^2 u du = u - \coth u$
- 35) $\int \sinh^2 u du = \frac{\sinh 2u}{4} - \frac{u}{2} = \frac{1}{2}[\sinh u \cosh u - u]$
- 36) $\int \cosh^2 u du = \frac{\sinh 2u}{4} + \frac{u}{2} = \frac{1}{2}[\sinh u \cosh u + u]$
- 37) $\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u$
- 38) $\int \operatorname{csch} u \coth u du = -\operatorname{csch} u$

Integrales con $au + b$.

- 39) $\int \frac{du}{au+b} = \frac{1}{a} \ln(au+b)$
- 40) $\int \frac{u du}{au+b} = \frac{u}{a} - \frac{b}{a^2} \ln(au+b)$
- 41) $\int \frac{u^2 du}{au+b} = \frac{(au+b)^2}{2a^3} - \frac{2b(au+b)}{a^3} + \frac{b^2}{a^3} \ln(au+b)$
- 42) $\int \frac{u^3 du}{au+b} = \frac{(au+b)^3}{3a^4} - \frac{3b(au+b)^2}{2a^4} + \frac{3b^2(au+b)}{a^4} - \frac{b^3}{a^4} \ln(au+b)$
- 43) $\int \frac{du}{u(au+b)} = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{u}{au+b} \right)$
- 44) $\int \frac{du}{u^2(au+b)} = -\frac{1}{bu} + \frac{a}{b^2} \ln \left(\frac{au+b}{u} \right)$
- 45) $\int \frac{du}{(au+b)^2} = \frac{-1}{a(au+b)}$
- 46) $\int \frac{u du}{(au+b)^2} = \frac{b}{a^2(au+b)} + \frac{1}{a^2} \ln(au+b)$
- 47) $\int \frac{u^2 du}{(au+b)^2} = \frac{au+b}{a^3} - \frac{b^2}{a^3(au+b)} - \frac{2b}{a^3} \ln(au+b)$
- 48) $\int \frac{du}{u(au+b)^2} = \frac{1}{b(au+b)} + \frac{1}{b^2} \ln \left(\frac{u}{au+b} \right)$
- 49) $\int \frac{du}{u^2(au+b)^2} = \frac{-a}{b^2(au+b)} - \frac{1}{b^2 u} + \frac{2a}{b^3} \ln \left(\frac{au+b}{u} \right)$
- 50) $\int \frac{du}{(au+b)^3} = \frac{-1}{2(au+b)^2}$
- 51) $\int \frac{u du}{(au+b)^3} = \frac{-1}{a^2(au+b)} + \frac{b}{2a^2(au+b)^2}$
- 52) $\int \frac{u^2 du}{(au+b)^3} = \frac{2b}{a^3(au+b)} - \frac{b^2}{2a^3(au+b)^2} + \frac{1}{a^3} \ln(au+b)$

$$53) \int (au+b) du = \frac{(au+b)^2}{2a}$$

$$54) \int (au+b)^n du = \frac{(au+b)^{n+1}}{(n+1)a} \quad \text{para } n \neq -1$$

$$55) \int u(au+b)^n du = \frac{(au+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(au+b)^{n+1}}{(n+1)a^2} \quad \text{para } n \neq -1, -2$$

$$56) \int u^2(au+b)^n du = \frac{(au+b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{2b(au+b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(au+b)^{n+1}}{(n+1)a^3}$$

para $n \neq -1, -2, -3$

$$57) \int u^m(au+b)^n du =$$

$$= \begin{cases} \frac{u^{m+1}(au+b)^n}{m+n+1} + \frac{nb}{m+n+1} \int u^m(au+b)^{n-1} du \\ \frac{u^m(au+b)^{n+1}}{(m+n+1)a} - \frac{mb}{(m+n+1)a} \int u^{m-1}(au+b)^n du \\ \frac{-u^{m+1}(au+b)^{n+1}}{(n+1)b} + \frac{m+n+2}{(n+1)b} \int u^m(au+b)^{n+1} du \end{cases}$$

Integrales con $\sqrt{au+b}$.

$$58) \int \frac{du}{\sqrt{au+b}} = \frac{2\sqrt{au+b}}{a}$$

$$59) \int \frac{udu}{\sqrt{au+b}} = \frac{2(au-2b)}{3a^2} \sqrt{au+b}$$

$$60) \int \frac{u^2 du}{\sqrt{au+b}} = \frac{2(3a^2 u^2 - 4ab u + 8b^2)}{15a^3} \sqrt{au+b}$$

$$61) \int \frac{du}{u\sqrt{au+b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left(\frac{\sqrt{au+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{au+b} + \sqrt{b}} \right) \\ \frac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{au+b}{-b}} \end{cases}$$

$$62) \int \frac{du}{u^2 \sqrt{au+b}} = -\frac{\sqrt{au+b}}{bu} - \frac{a}{2b} \int \frac{du}{u\sqrt{au+b}}$$

$$63) \int \sqrt{au+b} du = \frac{2\sqrt{(au+b)^3}}{3a}$$

$$64) \int u\sqrt{au+b} du = \frac{2(3au-2b)}{15a^2} \sqrt{(au+b)^3}$$

$$65) \int u^2 \sqrt{au+b} du = \frac{2(15a^2 u^2 - 12ab u + 8b^2)}{105a^3} \sqrt{(au+b)^3}$$

$$66) \int \frac{\sqrt{au+b}}{u} du = 2\sqrt{au+b} + b \int \frac{du}{u\sqrt{au+b}}$$

$$67) \int \frac{\sqrt{au+b}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{au+b}}{u} + \frac{a}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{au+b}}$$

$$68) \int \frac{u^m}{\sqrt{au+b}} du = \frac{2u^m \sqrt{au+b}}{(2m+1)a} - \frac{2mb}{(2m+1)a} \int \frac{u^{m-1}}{\sqrt{au+b}} du$$

$$69) \int \frac{du}{u^m \sqrt{au+b}} = -\frac{\sqrt{au+b}}{(m-1)bu^{m-1}} - \frac{(2m-3)a}{(2m-2)b} \int \frac{du}{u^{m-1} \sqrt{au+b}}$$

$$70) \int u^m \sqrt{au+b} du = \frac{2u^m}{(2m+3)a} (au+b)^{3/2} - \frac{2mb}{(2m+3)a} \int u^{m-1} \sqrt{au+b} du$$

$$71) \int \frac{\sqrt{au+b}}{u^m} du = -\frac{\sqrt{au+b}}{(m-1)u^{m-1}} + \frac{a}{2(m-1)} \int \frac{du}{u^{m-1} \sqrt{au+b}}$$

$$72) \int \frac{\sqrt{au+b}}{u^m} du = \frac{-(au+b)^{3/2}}{(m-1)bu^{m-1}} - \frac{(2m-5)a}{(2m-2)b} \int \frac{\sqrt{au+b}}{u^{m-1}} du$$

$$73) \int (au+b)^{m/2} du = \frac{2(au+b)^{(m+2)/2}}{a(m+2)}$$

$$74) \int u(au+b)^{m/2} du = \frac{2(au+b)^{(m+4)/2}}{a^2(m+4)} - \frac{2b(au+b)^{(m+2)/2}}{a^2(m+2)}$$

$$75) \int u^2(au+b)^{m/2} du = \frac{2(au+b)^{(m+6)/2}}{a^3(m+6)} - \frac{4b(au+b)^{(m+4)/2}}{a^3(m+4)} + \frac{2b^2(au+b)^{(m+2)/2}}{a^3(m+2)}$$

$$76) \int \frac{(au+b)^{m/2}}{u} du = \frac{2(au+b)^{m/2}}{m} + b \int \frac{(au+b)^{(m-2)/2}}{u} du$$

$$77) \int \frac{(au+b)^{m/2}}{u^2} du = -\frac{(au+b)^{(m+2)/2}}{bu} + \frac{ma}{2b} \int \frac{(au+b)^{m/2}}{u} du$$

$$78) \int \frac{du}{u(au+b)^{m/2}} = \frac{2}{b(m-2)(au+b)^{(m-2)/2}} + \frac{1}{b} \int \frac{du}{u(au+b)^{(m-2)/2}}$$

Integrales con $u^2 + a^2$.

$$79) \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a}$$

$$80) \int \frac{udu}{u^2+a^2} = \frac{1}{2} \ln(u^2+a^2)$$

$$81) \int \frac{u^2 du}{u^2+a^2} = u - a \tan^{-1} \frac{u}{a}$$

$$82) \int \frac{u^3 du}{u^2+a^2} = \frac{u^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(u^2+a^2)$$

$$83) \int \frac{du}{u(u^2+a^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \left(\frac{u^2}{u^2+a^2} \right)$$

$$84) \int \frac{du}{u^2(u^2+a^2)} = -\frac{1}{a^2 u} - \frac{1}{a^3} \tan^{-1} \frac{u}{a}$$

$$85) \int \frac{du}{u^3(u^2+a^2)} = -\frac{1}{2a^2 u^2} - \frac{1}{2a^4} \ln \left(\frac{u^2}{u^2+a^2} \right)$$

$$86) \int \frac{du}{(u^2+a^2)^2} = \frac{u}{2a^2(u^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \frac{u}{a}$$

$$87) \int \frac{udu}{(u^2+a^2)^2} = \frac{-1}{2(u^2+a^2)}$$

$$88) \int \frac{u^2 du}{(u^2+a^2)^2} = \frac{-u}{2(u^2+a^2)} + \frac{1}{2a} \tan^{-1} \frac{u}{a}$$

$$89) \int \frac{u^3 du}{(u^2+a^2)^2} = \frac{a^2}{2(u^2+a^2)} + \frac{1}{2} \ln(u^2+a^2)$$

$$90) \int \frac{du}{u(u^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2(u^2+a^2)} + \frac{1}{2a^4} \ln \left(\frac{u^2}{u^2+a^2} \right)$$

$$91) \int \frac{du}{u^2(u^2+a^2)^2} = -\frac{1}{a^4 u} - \frac{u}{2a^4(u^2+a^2)} - \frac{3}{2a^5} \tan^{-1} \frac{u}{a}$$

$$92) \int \frac{du}{u^3(u^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4 u^2} - \frac{1}{2a^4(u^2+a^2)} - \frac{1}{a^6} \ln \left(\frac{u^2}{u^2+a^2} \right)$$

$$93) \int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{u}{2a^2(n-1)(u^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}$$

$$94) \int \frac{udu}{(u^2+a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(u^2+a^2)^{n-1}}$$

$$95) \int \frac{du}{u(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)(u^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u(u^2+a^2)^{n-1}}$$

$$96) \int \frac{u^m du}{(u^2+a^2)^n} = \int \frac{u^{m-2} du}{(u^2+a^2)^{n-1}} - a^2 \int \frac{u^{m-2} du}{(u^2+a^2)^n}$$

$$97) \int \frac{du}{u^m(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u^m(u^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u^{m-2}(u^2+a^2)^n}$$

Integrales con $u^2 - a^2$.

$$98) \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{u-a}{u+a} \right) = -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a}$$

$$99) \int \frac{u du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2} \ln (u^2 - a^2)$$

$$100) \int \frac{u^2 du}{u^2 - a^2} = u + \frac{a}{2} \ln \left(\frac{u-a}{u+a} \right)$$

$$101) \int \frac{u^3 du}{u^2 - a^2} = \frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{2} \ln (u^2 - a^2)$$

$$102) \int \frac{du}{u(u^2 - a^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \left(\frac{u^2 - a^2}{u^2} \right)$$

$$103) \int \frac{du}{u^2(u^2 - a^2)} = \frac{1}{a^2 u} + \frac{1}{2a^3} \ln \left(\frac{u-a}{u+a} \right)$$

$$104) \int \frac{du}{u^3(u^2 - a^2)} = \frac{1}{2a^2 u^2} - \frac{1}{2a^4} \ln \left(\frac{u^2}{u^2 - a^2} \right)$$

$$105) \int \frac{du}{(u^2 - a^2)^2} = \frac{-u}{2a^2(u^2 - a^2)} - \frac{1}{4a^3} \ln \left(\frac{u-a}{u+a} \right)$$

$$106) \int \frac{u du}{(u^2 - a^2)^2} = \frac{-1}{2(u^2 - a^2)}$$

$$107) \int \frac{u^2 du}{(u^2 - a^2)^2} = \frac{-u}{2(u^2 - a^2)} + \frac{1}{4a} \ln \left(\frac{u-a}{u+a} \right)$$

$$108) \int \frac{u^3 du}{(u^2 - a^2)^2} = \frac{-a}{2(u^2 - a^2)} + \frac{1}{2} \ln (u^2 - a^2)$$

$$109) \int \frac{du}{u(u^2 - a^2)^2} = \frac{-1}{2a^2(u^2 - a^2)} + \frac{1}{2a^4} \ln \left(\frac{u^2}{u^2 - a^2} \right)$$

$$110) \int \frac{du}{u^2(u^2 - a^2)^2} = -\frac{1}{a^4 u} - \frac{u}{2a^4(u^2 - a^2)} - \frac{3}{4a^5} \ln \left(\frac{u-a}{u+a} \right)$$

$$111) \int \frac{du}{u^3(u^2 - a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4 u^2} - \frac{1}{2a^4(u^2 - a^2)} + \frac{1}{a^6} \ln \left(\frac{u^2}{u^2 - a^2} \right)$$

$$112) \int \frac{du}{(u^2 - a^2)^n} = \frac{-u}{2a^2(n-1)(u^2 - a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{n-1}}$$

$$113) \int \frac{u du}{(u^2 - a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(u^2 - a^2)^{n-1}}$$

$$114) \int \frac{du}{u(u^2 - a^2)^n} = \frac{-1}{2a^2(n-1)(u^2 - a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u(u^2 - a^2)^{n-1}}$$

$$115) \int \frac{u^m du}{(u^2 - a^2)^n} = \int \frac{u^{m-2} du}{(u^2 - a^2)^{n-1}} + a^2 \int \frac{u^{m-2} du}{(u^2 - a^2)^n}$$

$$116) \int \frac{du}{u^m(u^2 - a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u^{m-2}(u^2 - a^2)^n} + \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u^m(u^2 - a^2)^{n-1}}$$

Integrales con $a^2 - u^2$, $u^2 < a^2$.

$$117) \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a+u}{a-u} \right) = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a}$$

$$118) \int \frac{u du}{a^2 - u^2} = -\frac{1}{2} \ln(a^2 - u^2)$$

$$119) \int \frac{u^2 du}{a^2 - u^2} = -u + \frac{a}{2} \ln \left(\frac{a+u}{a-u} \right)$$

$$120) \int \frac{u^3 du}{a^2 - u^2} = -\frac{u^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(a^2 - u^2)$$

$$121) \int \frac{du}{u(a^2 - u^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \left(\frac{u^2}{a^2 - u^2} \right)$$

$$122) \int \frac{du}{u^2(a^2 - u^2)} = \frac{1}{a^2 u} + \frac{1}{2a^3} \ln \left(\frac{a+u}{a-u} \right)$$

$$123) \int \frac{du}{u^3(a^2 - u^2)} = -\frac{1}{2a^2 u^2} + \frac{1}{2a^4} \ln \left(\frac{u^2}{a^2 - u^2} \right)$$

$$124) \int \frac{du}{(a^2 - u^2)^2} = \frac{u}{2a^2(a^2 - u^2)} + \frac{1}{4a^3} \ln \left(\frac{a+u}{a-u} \right)$$

$$125) \int \frac{u du}{(a^2 - u^2)^2} = \frac{1}{2(a^2 - u^2)}$$

$$126) \int \frac{u^2 du}{(a^2 - u^2)^2} = \frac{u}{2(a^2 - u^2)} - \frac{1}{4a} \ln \left(\frac{a+u}{a-u} \right)$$

$$127) \int \frac{u^3 du}{(a^2 - u^2)^2} = \frac{a^2}{2(a^2 - u^2)} + \frac{1}{2} \ln(a^2 - u^2)$$

$$128) \int \frac{du}{u(a^2 - u^2)^2} = \frac{1}{2a^2(a^2 - u^2)} + \frac{1}{2a^4} \ln \left(\frac{u^2}{a^2 - u^2} \right)$$

$$129) \int \frac{du}{u^2(a^2 - u^2)^2} = -\frac{1}{a^4 u} + \frac{u}{2a^4(a^2 - u^2)} + \frac{3}{4a^5} \ln \left(\frac{a+u}{a-u} \right)$$

$$130) \int \frac{du}{u^3(a^2 - u^2)^2} = -\frac{1}{2a^4 u^2} + \frac{1}{2a^4(a^2 - u^2)} + \frac{1}{a^6} \ln \left(\frac{u^2}{a^2 - u^2} \right)$$

$$131) \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2 - x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{n-1}}$$

$$132) \int \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(a^2 - x^2)^{n-1}}$$

Integrales con $\sqrt{u^2 + a^2}$.

$$133) \int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u\sqrt{u^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln (u + \sqrt{u^2 + a^2})$$

$$134) \int u \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{(u^2 + a^2)^{3/2}}{3}$$

$$135) \int u^2 \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u(u^2 + a^2)^{3/2}}{4} - \frac{a^2 u \sqrt{u^2 + a^2}}{8} - \frac{a^4}{8} \ln (u + \sqrt{u^2 + a^2})$$

$$136) \int u^3 \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{(u^2 + a^2)^{5/2}}{5} - \frac{a^2 (u^2 + a^2)^{3/2}}{3}$$

$$137) \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln (u + \sqrt{u^2 + a^2}) = \sinh^{-1} \frac{u}{a}$$

$$138) \int \frac{u du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \sqrt{u^2 + a^2}$$

$$139) \int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{u\sqrt{u^2 + a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln (u + \sqrt{u^2 + a^2})$$

$$140) \int \frac{u^3 du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{(u^2 + a^2)^{3/2}}{3} - a^2 \sqrt{u^2 + a^2}$$

$$141) \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right)$$

$$142) \int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{a^2 u}$$

$$143) \int \frac{du}{u^3 \sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{2a^2 u^2} + \frac{1}{2a^3} \ln \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right)$$

$$144) \int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 + a^2} - a \ln \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right)$$

$$145) \int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u} + \ln (u + \sqrt{u^2 + a^2})$$

$$146) \int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u^3} du = -\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{2u^2} - \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right)$$

$$147) \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 + a^2}}$$

$$148) \int \frac{u du}{(u^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{u^2 + a^2}}$$

$$149) \int \frac{u^2 du}{(u^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{-u}{\sqrt{u^2 + a^2}} + \ln (u + \sqrt{u^2 + a^2})$$

$$150) \int \frac{u^3 du}{(u^2 + a^2)^{3/2}} = \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{u^2 + a^2}}$$

$$151) \int \frac{du}{u(u^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2 \sqrt{u^2 + a^2}} - \frac{1}{a^3} \ln \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right)$$

$$152) \int \frac{du}{u^2(u^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{a^4 u} - \frac{u}{a^4 \sqrt{u^2+a^2}}$$

$$153) \int \frac{du}{u^3(u^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2a^2 u^2 \sqrt{u^2+a^2}} - \frac{3}{2a^4 \sqrt{u^2+a^2}} + \frac{3}{2a^5} \ln \left(\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u} \right)$$

$$154) \int (u^2+a^2)^{3/2} du = \frac{u(u^2+a^2)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2 u \sqrt{u^2+a^2}}{8} + \frac{3}{8} a^4 \ln(u + \sqrt{u^2+a^2})$$

$$155) \int u(u^2+a^2)^{3/2} du = \frac{(u^2+a^2)^{5/2}}{5}$$

$$156) \int u^2(u^2+a^2)^{3/2} du = \frac{u(u^2+a^2)^{5/2}}{6} - \frac{a^2 u(u^2+a^2)^{3/2}}{24} - \frac{a^4 u \sqrt{u^2+a^2}}{16} - \frac{a^6}{16} \ln(u + \sqrt{u^2+a^2})$$

$$157) \int \frac{(u^2+a^2)^{3/2}}{u} du = \frac{(u^2+a^2)^{3/2}}{3} + a^2 \sqrt{u^2+a^2} - a^3 \ln \left(\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u} \right)$$

$$158) \int \frac{(u^2+a^2)^{3/2}}{u^2} du = -\frac{(u^2+a^2)^{3/2}}{u} + \frac{3u\sqrt{u^2+a^2}}{2} + \frac{3}{2} a^2 \ln(u + \sqrt{u^2+a^2})$$

$$159) \int \frac{(u^2+a^2)^{3/2}}{u^3} du = -\frac{(u^2+a^2)^{3/2}}{2u^2} + \frac{3}{2} \sqrt{u^2+a^2} - \frac{3}{2} a \ln \left(\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u} \right)$$

Integrales con $\sqrt{u^2-a^2}$.

$$160) \int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2-a^2})$$

$$161) \int \frac{u du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \sqrt{u^2-a^2}$$

$$162) \int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u\sqrt{u^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{u^2-a^2})$$

$$163) \int \frac{u^3 du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{(u^2-a^2)^{3/2}}{3} + a^2 \sqrt{u^2-a^2}$$

$$164) \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(\frac{u}{a} \right)$$

$$165) \int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2 u}$$

$$166) \int \frac{du}{u^3\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{2a^2 u^2} + \frac{1}{2a^3} \sec^{-1} \left(\frac{u}{a} \right)$$

$$167) \int \sqrt{u^2-a^2} du = \frac{u\sqrt{u^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{u^2-a^2})$$

$$168) \int u\sqrt{u^2-a^2} du = \frac{(u^2-a^2)^{3/2}}{3}$$

$$169) \int u^2\sqrt{u^2-a^2} du = \frac{u(u^2-a^2)^{3/2}}{4} + \frac{a^2 u \sqrt{u^2-a^2}}{8} - \frac{a^4}{8} \ln(u + \sqrt{u^2-a^2})$$

$$170) \int u^3\sqrt{u^2-a^2} du = \frac{(u^2-a^2)^{5/2}}{5} + \frac{a^2(u^2-a^2)^{3/2}}{3}$$

$$171) \int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} du = \sqrt{u^2-a^2} - a \sec^{-1} \frac{u}{a}$$

$$172) \int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln(u + \sqrt{u^2-a^2})$$

$$173) \int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^3} du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{2u^2} + \frac{1}{2a} \sec^{-1} \frac{u}{a}$$

$$174) \int \frac{du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2 \sqrt{u^2-a^2}}$$

$$175) \int \frac{u du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{u^2-a^2}}$$

$$176) \int \frac{u^2 du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{\sqrt{u^2-a^2}} + \ln(u + \sqrt{u^2-a^2})$$

$$177) \int \frac{u^3 du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = \sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{u^2-a^2}}$$

$$178) \int \frac{du}{u(u^2-a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{a^2 \sqrt{u^2-a^2}} - \frac{1}{a^3} \sec^{-1} \frac{u}{a}$$

$$179) \int \frac{du}{u^2(u^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^4 u} - \frac{u}{a^4 \sqrt{u^2-a^2}}$$

$$180) \int \frac{du}{u^3(u^2-a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2a^2 u^2 \sqrt{u^2-a^2}} - \frac{3}{2a^4 \sqrt{u^2-a^2}} - \frac{3}{2a^5} \sec^{-1} \frac{u}{a}$$

$$181) \int (u^2-a^2)^{3/2} du = \frac{u(u^2-a^2)^{3/2}}{4} - \frac{3a^2 u \sqrt{u^2-a^2}}{8} + \frac{3}{8} a^4 \ln(u + \sqrt{u^2-a^2})$$

$$182) \int u(u^2-a^2)^{3/2} du = \frac{(u^2-a^2)^{5/2}}{5}$$

$$183) \int u^2(u^2-a^2)^{3/2} du = \frac{u(u^2-a^2)^{5/2}}{6} + \frac{a^2 u(u^2-a^2)^{3/2}}{24} - \frac{a^4 u \sqrt{u^2-a^2}}{16} + \frac{a^6}{16} \ln(u + \sqrt{u^2-a^2})$$

$$184) \int u^3(u^2-a^2)^{3/2} du = \frac{(u^2-a^2)^{7/2}}{7} + \frac{a^2(u^2-a^2)^{5/2}}{5}$$

$$185) \int \frac{(u^2-a^2)^{3/2}}{u} du = \frac{(u^2-a^2)^{3/2}}{3} - a^2 \sqrt{u^2-a^2} + a^3 \sec^{-1} \frac{u}{a}$$

$$186) \int \frac{(u^2-a^2)^{3/2}}{u^2} du = -\frac{(u^2-a^2)^{3/2}}{u} + \frac{3u\sqrt{u^2-a^2}}{2} - \frac{3}{2} a^2 \ln(u + \sqrt{u^2-a^2})$$

$$187) \int \frac{(u^2-a^2)^{3/2}}{u^3} du = -\frac{(u^2-a^2)^{3/2}}{2u^2} + \frac{3\sqrt{u^2-a^2}}{2} - \frac{3}{2} a \sec^{-1} \frac{u}{a}$$

Integrales con $\sqrt{a^2-u^2}$.

$$188) \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a}$$

$$189) \int \frac{u du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\sqrt{a^2-u^2}$$

$$190) \int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a}$$

$$191) \int \frac{u^3 du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{(a^2-u^2)^{3/2}}{3} - a^2 \sqrt{a^2-u^2}$$

$$192) \int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u} \right)$$

$$193) \int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2 u}$$

$$194) \int \frac{du}{u^3\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{2a^2 u^2} - \frac{1}{2a^3} \ln \left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u} \right)$$

$$195) \int \sqrt{a^2-u^2} du = \frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a}$$

$$196) \int u\sqrt{a^2-u^2} du = -\frac{(a^2-u^2)^{3/2}}{3}$$

$$197) \int u^2\sqrt{a^2-u^2} du = -\frac{u(a^2-u^2)^{3/2}}{4} + \frac{a^2 u \sqrt{a^2-u^2}}{8} + \frac{a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a}$$

$$198) \int u^3\sqrt{a^2-u^2} du = \frac{(a^2-u^2)^{5/2}}{5} - \frac{a^2(a^2-u^2)^{3/2}}{3}$$

$$199) \int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} du = \sqrt{a^2-u^2} - a \ln \left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u} \right)$$

$$200) \int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a}$$

$$201) \int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^3} du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{2u^2} + \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u} \right)$$

$$202) \int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$203) \int \frac{udu}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$204) \int \frac{u^2 du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a}$$

$$205) \int \frac{u^3 du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$206) \int \frac{du}{u(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} - \frac{1}{a^3} \ln \left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u} \right)$$

$$207) \int \frac{du}{u^2(a^2-u^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^4 u} + \frac{u}{a^4\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$208) \int \frac{du}{u^3(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2a^2 u^2 \sqrt{a^2-u^2}} + \frac{3}{2a^4 \sqrt{a^2-u^2}} - \frac{3}{2a^5} \ln \left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u} \right)$$

$$209) \int (a^2-u^2)^{3/2} du = \frac{u(a^2-u^2)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2 u \sqrt{a^2-u^2}}{8} + \frac{3}{8} a^4 \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a}$$

$$210) \int u(a^2-u^2)^{3/2} du = -\frac{(a^2-u^2)^{5/2}}{5}$$

$$211) \int u^2(a^2-u^2)^{3/2} du = -\frac{u(a^2-u^2)^{5/2}}{6} + \frac{a^2 u(a^2-u^2)^{3/2}}{24} + \frac{a^4 u \sqrt{a^2-u^2}}{16} + \frac{a^6}{16} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a}$$

$$212) \int u^3(a^2-u^2)^{3/2} du = \frac{(a^2-u^2)^{7/2}}{7} - \frac{a^2(a^2-u^2)^{5/2}}{5}$$

$$213) \int \frac{(a^2-u^2)^{3/2}}{u} du = \frac{(a^2-u^2)^{3/2}}{3} + a^2 \sqrt{a^2-u^2} - a^3 \ln \left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u} \right)$$

$$214) \int \frac{(a^2-u^2)^{3/2}}{u^2} du = -\frac{(a^2-u^2)^{3/2}}{u} - \frac{3u\sqrt{a^2-u^2}}{2} + \frac{3}{2} a^2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a}$$

$$215) \int \frac{(a^2-u^2)^{3/2}}{u^3} du = -\frac{(a^2-u^2)^{3/2}}{2u^2} - \frac{3\sqrt{a^2-u^2}}{2} + \frac{3}{2} a \ln \left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u} \right)$$

Integrales con $au^2 + bu + c$.

$$216) \int \frac{du}{au^2+bu+c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \left(\frac{2au+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left(\frac{2au+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2au+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right) \end{cases}$$

$$217) \int \frac{udu}{au^2+bu+c} = \frac{1}{2a} \ln(au^2+bu+c) - \frac{b}{2a} \int \frac{du}{au^2+bu+c}$$

$$218) \int \frac{u^2 du}{au^2+bu+c} = \frac{u}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln(au^2+bu+c) + \frac{b^2-2ac}{2a^2} \int \frac{du}{au^2+bu+c}$$

$$219) \int \frac{du}{u(au^2+bu+c)} = \frac{1}{2c} \ln \left(\frac{u^2}{au^2+bu+c} \right) - \frac{b}{2c} \int \frac{du}{au^2+bu+c}$$

$$220) \int \frac{du}{u^2(au^2+bu+c)} = \frac{b}{2c^2} \ln \left(\frac{au^2+bu+c}{u^2} \right) - \frac{1}{cu}$$

$$+ \frac{b^2-2ac}{2c^2} \int \frac{du}{au^2+bu+c}$$

$$221) \int \frac{du}{(au^2+bu+c)^2} = \frac{2au+b}{(4ac-b^2)(au^2+bu+c)} + \frac{2a}{4ac-b^2} \int \frac{du}{au^2+bu+c}$$

$$222) \int \frac{udu}{(au^2+bu+c)^2} = -\frac{bu+2c}{(4ac-b^2)(au^2+bu+c)} - \frac{b}{4ac-b^2} \int \frac{du}{au^2+bu+c}$$

$$223) \int \frac{u^2 du}{(au^2+bu+c)^2} = \frac{(b^2-2ac)u+bc}{a(4ac-b^2)(au^2+bu+c)} + \frac{2c}{4ac-b^2} \int \frac{du}{au^2+bu+c}$$

$$224) \int \frac{du}{u(au^2+bu+c)^2} = \frac{1}{2c(au^2+bu+c)} - \frac{b}{2c} \int \frac{du}{(au^2+bu+c)^2} + \frac{1}{c} \int \frac{du}{u(au^2+bu+c)}$$

$$225) \int \frac{du}{u^2(au^2+bu+c)^2} = -\frac{1}{cu(au^2+bu+c)} - \frac{3a}{c} \int \frac{du}{(au^2+bu+c)^2} - \frac{2b}{c} \int \frac{du}{u(au^2+bu+c)^2}$$

$$226) \int \frac{u^m du}{au^2+bu+c} = \frac{u^{m-1}}{(m-1)a} - \frac{c}{a} \int \frac{u^{m-2} du}{au^2+bu+c} - \frac{b}{a} \int \frac{u^{m-1} du}{au^2+bu+c}$$

$$227) \int \frac{du}{u^n(au^2+bu+c)} = -\frac{1}{(n-1)cu^{n-1}} - \frac{b}{c} \int \frac{du}{u^{n-1}(au^2+bu+c)} - \frac{a}{c} \int \frac{du}{u^{n-2}(au^2+bu+c)}$$

Integrales con $u^3 + a^3$.

$$228) \int \frac{du}{u^3+a^3} = \frac{1}{6a^2} \ln \frac{(u+a)^2}{u^2-au+a^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2u-a}{a\sqrt{3}}$$

$$229) \int \frac{udu}{u^3+a^3} = \frac{1}{6a} \ln \frac{u^2-au+a^2}{(u+a)^2} + \frac{1}{a\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2u-a}{a\sqrt{3}}$$

$$230) \int \frac{u^2 du}{u^3+a^3} = \frac{1}{3} \ln(u^3+a^3)$$

$$231) \int \frac{du}{u(u^3+a^3)} = \frac{1}{3a^3} \ln \left(\frac{u^3}{u^3+a^3} \right)$$

$$232) \int \frac{du}{u^2(u^3+a^3)} = -\frac{1}{a^3 u} - \frac{1}{6a^4} \ln \frac{u^2-au+a^2}{(u+a)^2} - \frac{1}{a^4\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2u-a}{a\sqrt{3}}$$

$$233) \int \frac{du}{(u^3+a^3)^2} = \frac{u}{3a^3(u^3+a^3)} + \frac{1}{9a^5} \ln \frac{(u+a)^2}{u^2-au+a^2} + \frac{2}{3a^5\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2u-a}{a\sqrt{3}}$$

$$234) \int \frac{udu}{(u^3+a^3)^2} = \frac{u^2}{3a^3(u^3+a^3)} + \frac{1}{18a^4} \ln \frac{u^2-au+a^2}{(u+a)^2} + \frac{1}{3a^4\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2u-a}{a\sqrt{3}}$$

$$235) \int \frac{u^2 du}{(u^3+a^3)^2} = -\frac{1}{3(u^3+a^3)}$$

$$236) \int \frac{du}{u(u^3+a^3)^2} = \frac{1}{3a^3(u^3+a^3)} + \frac{1}{3a^6} \ln \left(\frac{u^3}{u^3+a^3} \right)$$

$$237) \int \frac{du}{u^2(u^3+a^3)^2} = -\frac{1}{a^6 u} - \frac{u^2}{3a^6(u^3+a^3)} - \frac{4}{3a^6} \int \frac{udu}{u^3+a^3}$$

$$238) \int \frac{u^m du}{u^3+a^3} = \frac{u^{m-2}}{m-2} - a^3 \int \frac{u^{m-3} du}{u^3+a^3}$$

$$239) \int \frac{du}{u^n(u^3+a^3)} = \frac{-1}{a^3(n-1)u^{n-1}} - \frac{1}{a^3} \int \frac{du}{u^{n-3}(u^3+a^3)}$$

Integrales con $u^4 \pm a^4$.

$$240) \int \frac{du}{u^4+a^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}} \ln \left(\frac{u^2+au\sqrt{2}+a^2}{u^2-au\sqrt{2}+a^2} \right) - \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \left[\tan^{-1} \left(1 - \frac{u\sqrt{2}}{a} \right) - \tan^{-1} \left(1 + \frac{u\sqrt{2}}{a} \right) \right]$$

$$241) \int \frac{u^2 du}{u^4+a^4} = \frac{1}{4a\sqrt{2}} \ln \left(\frac{u^2+au\sqrt{2}+a^2}{u^2-au\sqrt{2}+a^2} \right) - \frac{1}{2a\sqrt{2}} \left[\tan^{-1} \left(1 - \frac{u\sqrt{2}}{a} \right) - \tan^{-1} \left(1 + \frac{u\sqrt{2}}{a} \right) \right]$$

$$242) \int \frac{du}{u^2(u^4+a^4)} = -\frac{1}{a^4 u} - \frac{1}{4a^5\sqrt{2}} \ln \left(\frac{u^2+au\sqrt{2}+a^2}{u^2-au\sqrt{2}+a^2} \right) + \frac{1}{2a^5\sqrt{2}} \left[\tan^{-1} \left(1 - \frac{u\sqrt{2}}{a} \right) - \tan^{-1} \left(1 + \frac{u\sqrt{2}}{a} \right) \right]$$

$$243) \int \frac{u^3 du}{u^4+a^4} = \frac{1}{4} \ln(u^4+a^4)$$

$$244) \int \frac{du}{u(u^4+a^4)} = \frac{1}{4a^4} \ln \left(\frac{u^4}{u^4+a^4} \right)$$

$$245) \int \frac{u du}{u^4+a^4} = \frac{1}{2a^2} \tan^{-1} \frac{u^2}{a^2}$$

$$246) \int \frac{du}{u^3(u^4+a^4)} = -\frac{1}{2a^4 u^2} - \frac{1}{2a^6} \tan^{-1} \frac{u^2}{a^2}$$

$$247) \int \frac{du}{u^4-a^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \left(\frac{u-a}{u+a} \right) - \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \frac{u}{a}$$

$$248) \int \frac{u du}{u^4-a^4} = \frac{1}{4a^2} \ln \left(\frac{u^2-a^2}{u^2+a^2} \right)$$

$$249) \int \frac{u^2 du}{u^4-a^4} = \frac{1}{4a} \ln \left(\frac{u-a}{u+a} \right) + \frac{1}{2a} \tan^{-1} \frac{u}{a}$$

$$250) \int \frac{u^3 du}{u^4-a^4} = \frac{1}{4} \ln(u^4-a^4)$$

$$251) \int \frac{du}{u(u^4-a^4)} = \frac{1}{4a^4} \ln \left(\frac{u^4-a^4}{u^4} \right)$$

$$252) \int \frac{du}{u^2(u^4-a^4)} = \frac{1}{a^4 u} + \frac{1}{4a^5} \ln \left(\frac{u-a}{u+a} \right) + \frac{1}{2a^5} \tan^{-1} \frac{u}{a}$$

$$253) \int \frac{du}{u^3(u^4-a^4)} = \frac{1}{2a^4 u^2} + \frac{1}{4a^6} \ln \left(\frac{u^2-a^2}{u^2+a^2} \right)$$

Integrales con $\sin(au)$.

$$254) \int \sin(au) du = -\frac{\cos(au)}{a}$$

$$255) \int u \sin(au) du = \frac{\sin(au)}{a^2} - \frac{u \cos(au)}{a}$$

$$256) \int u^2 \sin(au) du = \frac{2u}{a^2} \sin(au) + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{u^2}{a} \right) \cos(au)$$

$$257) \int u^3 \sin(au) du = \left(\frac{3u^2}{a^2} - \frac{6}{a^4} \right) \sin(au) + \left(\frac{6u}{a^3} - \frac{u^3}{a} \right) \cos(au)$$

$$258) \int u^n \sin(au) du = -\frac{u^n \cos(au)}{a} + \frac{n}{a} \int u^{n-1} \cos(au) du$$

$$259) \int u^n \sin(au) du = -\frac{u^n \cos(au)}{a} + \frac{nu^{n-1}}{a^2} \sin(au) - \frac{n(n-1)}{a^2} \int u^{n-2} \sin(au) du$$

$$260) \int \sin^2(au) du = \frac{u}{2} - \frac{\sin(2au)}{4a}$$

$$261) \int \sin^3(au) du = -\frac{\cos(ax)}{a} + \frac{\cos^3(au)}{3a}$$

$$262) \int \sin^4(au) du = \frac{3u}{8} - \frac{\sin(2au)}{4a} + \frac{\sin(4au)}{32a}$$

$$263) \int u \sin^2(au) du = \frac{u^2}{4} - \frac{u \sin(2au)}{4a} - \frac{\cos(2au)}{8a^2}$$

$$264) \int \frac{\sin(au)}{u} du = au - \frac{(au)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(au)^5}{5 \cdot 5!} - \dots$$

$$265) \int \frac{\sin(au)}{u^2} du = -\frac{\sin(au)}{u} + a \int \frac{\cos(au)}{u} du$$

$$266) \int \frac{du}{\sin(au)} = \frac{1}{a} \ln [\csc(au) - \cot(au)] = \frac{1}{a} \ln \left[\tan \left(\frac{au}{2} \right) \right]$$

$$267) \int \frac{u du}{\sin(au)} = \frac{1}{a^2} \left\{ au + \frac{(au)^3}{18} + \frac{7(au)^5}{1800} + \dots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n(au)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right\}$$

$$268) \int \frac{du}{\sin^2(au)} = -\frac{1}{a} \cot(au)$$

$$269) \int \frac{du}{\sin^3(au)} = -\frac{\cos(au)}{2a \sin^2(au)} + \frac{1}{2a} \ln \left[\tan \left(\frac{au}{2} \right) \right]$$

$$270) \int \sin(pu) \sin(qu) du = \frac{\sin[(p-q)u]}{2(p-q)} - \frac{\sin[(p+q)u]}{2(p+q)}$$

$$271) \int \frac{du}{1-\sin(au)} = \frac{1}{a} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2} \right)$$

$$272) \int \frac{u du}{1-\sin(au)} = \frac{u}{a} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2} \right)$$

$$273) \int \frac{du}{1+\sin(au)} = -\frac{1}{a} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2} \right)$$

$$274) \int \frac{u du}{1+\sin(au)} = -\frac{u}{a} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2} \right)$$

$$275) \int \frac{du}{(1-\sin(au))^2} = \frac{1}{2a} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2} \right) + \frac{1}{6a} \tan^3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2} \right)$$

$$276) \int \frac{dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) - \frac{1}{6a} \tan^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right)$$

Integrales con $\cos(au)$.

$$277) \int \cos(au) du = \frac{\sin(au)}{a}$$

$$278) \int u \cos(au) du = \frac{\cos(au)}{a^2} + \frac{u \sin(au)}{a}$$

$$279) \int u^2 \cos(au) du = \frac{2u}{a^2} \cos(au) + \left(\frac{u^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin(au)$$

$$280) \int u^3 \cos(au) du = \left(\frac{3u^2}{a^2} - \frac{6}{a^4} \right) \cos(au) + \left(\frac{u^3}{a} - \frac{6u}{a^3} \right) \sin(au)$$

$$281) \int u^n \cos(au) du = \frac{u^n \sin(au)}{a} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} \sin(au) du$$

$$282) \int u^n \cos(au) du = -\frac{u^n \sin(au)}{a} + \frac{nu^{n-1}}{a^2} \cos(au) - \frac{n(n-1)}{a^2} \int u^{n-2} \cos(au) du$$

$$283) \int \cos^2(au) du = \frac{u}{2} + \frac{\sin(2au)}{4a}$$

$$284) \int \cos^3(au) du = \frac{\sin(au)}{a} - \frac{\sin^3(au)}{3a}$$

$$285) \int \cos^4(au) du = \frac{3u}{8} + \frac{\sin 2(au)}{4a} + \frac{\sin 4(au)}{32a}$$

$$286) \int u \cos^2(au) du = \frac{u^2}{4} + \frac{u \sin 2(au)}{4a} + \frac{\cos 2(au)}{8a^2}$$

$$287) \int \frac{\cos(au)}{u} du = \ln u - \frac{(au)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(au)^4}{4 \cdot 4!} - \frac{(au)^6}{6 \cdot 6!} + \dots$$

$$288) \int \frac{\cos(au)}{u^2} du = -\frac{\cos(au)}{u} - a \int \frac{\sin(au)}{u} du$$

$$289) \int \frac{du}{\cos(au)} = \frac{1}{a} \ln [\sec(au) + \tan(au)] = \frac{1}{a} \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2} \right) \right]$$

$$290) \int \frac{u du}{\cos(au)} = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{(au)^2}{2} + \frac{(au)^4}{8} + \frac{5(au)^6}{144} + \dots + \frac{E_n(au)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \dots \right\}$$

$$291) \int \frac{du}{\cos^2(au)} = \frac{\tan(au)}{a}$$

$$292) \int \frac{du}{\cos^3(au)} = \frac{\sec(au)}{2a \cos^2(au)} + \frac{1}{2a} \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2} \right) \right]$$

$$293) \int \cos(au) \cos(pu) du = \frac{\sec[(a-p)u]}{2(a-p)} - \frac{\sec[(a+p)u]}{2(a+p)}$$

$$294) \int \frac{du}{1-\cos(au)} = -\frac{1}{a} \cot \frac{au}{2}$$

$$295) \int \frac{u du}{1-\cos(au)} = -\frac{u}{a} \cot \frac{au}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \sin \frac{au}{2}$$

$$296) \int \frac{du}{1+\cos(au)} = \frac{1}{a} \tan \frac{au}{2}$$

$$297) \int \frac{u du}{1+\cos(au)} = \frac{u}{a} \tan \frac{au}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \cos \frac{au}{2}$$

$$298) \int \frac{du}{(1-\cos(au))^2} = -\frac{1}{2a} \cot \frac{au}{2} - \frac{1}{6a} \cot^3 \frac{au}{2}$$

$$299) \int \frac{du}{(1+\cos(au))^2} = \frac{1}{2a} \tan \frac{au}{2} + \frac{1}{6a} \tan^3 \frac{au}{2}$$

Integrales con $\sin(au)$ y $\cos(au)$.

$$300) \int \sin(au) \cos(au) du = \frac{\sin^2(au)}{2a} = -\frac{\cos^2(au)}{2a}$$

$$301) \int \sin(pu) \cos(qu) du = -\frac{\cos[(p-q)u]}{2(p-q)} - \frac{\cos[(p+q)u]}{2(p+q)}$$

$$302) \int \sin^n(au) \cos(au) du = \frac{\sin^{n+1}(au)}{(n+1)a}$$

$$303) \int \cos^n(au) \sin(au) du = -\frac{\cos^{n+1}(au)}{(n+1)a}$$

$$304) \int \sin^2(au) \cos^2(au) du = \frac{u}{8} - \frac{\sin 4(au)}{32a}$$

$$305) \int \frac{du}{\sin(au) \cos(au)} = \frac{1}{a} \ln \left[\tan(au) \right]$$

$$306) \int \frac{du}{\sin^2(au) \cos(au)} = \frac{1}{a} \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2} \right) \right] - \frac{1}{a \sin(au)}$$

$$307) \int \frac{du}{\sin(au) \cos^2(au)} = \frac{1}{a} \ln \left[\tan \left(\frac{au}{2} \right) \right] + \frac{1}{a \cos(au)}$$

$$308) \int \frac{du}{\sin^2(au) \cos^2(au)} = -\frac{2 \cot(2au)}{a}$$

$$309) \int \frac{\sec^2(au)}{\cos(au)} du = -\frac{\sec(au)}{a} + \frac{1}{a} \ln \left[\tan \left(\frac{au}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$310) \int \frac{\cos^2(au)}{\sin(au)} du = \frac{\cos(au)}{a} + \frac{1}{a} \ln \left[\tan \left(\frac{au}{2} \right) \right]$$

$$311) \int \frac{du}{\sin(au) \pm \cos(au)} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \ln \tan \left(\frac{au}{2} \pm \frac{\pi}{8} \right)$$

$$312) \int \frac{\sec(au) du}{\sin(au) \pm \cos(au)} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a} \ln [\sin(au) \pm \cos(au)]$$

$$313) \int \frac{\cos(au) du}{\sin(au) \pm \cos(au)} = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \ln [\sin(au) \pm \cos(au)]$$

Integrales con $\tan(au)$.

$$314) \int \tan(au) du = -\frac{1}{a} \ln \cos(au) = \frac{1}{a} \ln \sec(au)$$

$$315) \int \tan^2(au) du = \frac{\tan(au)}{a} - u$$

$$316) \int \tan^3(au) du = \frac{\tan^2(au)}{2a} + \frac{1}{a} \ln \cos(au)$$

$$317) \int \tan^n(au) du = \frac{\tan^{n-1}(au)}{(n-1)a} - \int \tan^{n-2}(au) du$$

$$318) \int \tan^n(au) \sec^2(au) du = \frac{\tan^{n+1}(au)}{(n+1)a}$$

$$319) \int \frac{\sec^2(au)}{\tan(au)} du = \frac{1}{a} \ln \tan(au)$$

$$320) \int \frac{du}{\tan(au)} = \frac{1}{a} \ln \sin(au)$$

$$321) \int u \tan^2(au) du = \frac{u \tan(au)}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \cos(au) - \frac{u^2}{2}$$

Integrales con $\cot(au)$.

$$322) \int \cot(au) du = \frac{1}{a} \ln \sin(au)$$

$$323) \int \cot^2(au) du = -\frac{\cot(au)}{a} - u$$

$$324) \int \cot^3(au) du = -\frac{\cot^2(au)}{2a} - \frac{1}{a} \ln \sin(au)$$

$$325) \int \cot^n(au) \csc^2(au) du = -\frac{\cot^{n+1}(au)}{(n+1)a}$$

$$326) \int \frac{\csc^2(au)}{\cot(au)} du = -\frac{1}{a} \ln \cot(au)$$

$$327) \int \frac{du}{\cot(au)} = -\frac{1}{a} \ln \cos(au)$$

$$328) \int u \cot^2(au) du = -\frac{u \cot(au)}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \sin(au) - \frac{u^2}{2}$$

$$329) \int \cot^n(au) du = -\frac{\cot^{n-1}(au)}{(n-1)a} - \int \cot^{n-2}(au) du$$

Integrales con $\sec(au)$.

$$330) \int \sec(au) du = \frac{1}{a} \ln [\sec(au) + \tan(au)] = \frac{1}{a} \ln \tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$331) \int \sec^2(au) du = \frac{\tan(au)}{a}$$

$$332) \int \sec^3(au) du = \frac{\sec(au) \tan(au)}{2a} + \frac{1}{2a} \ln [\sec(au) + \tan(au)]$$

$$333) \int \sec^n(au) \tan(au) du = \frac{\sec^n(au)}{na}$$

$$334) \int \frac{du}{\sec(au)} = \frac{\sin(au)}{a}$$

$$335) \int u \sec^2(au) du = \frac{x}{a} \tan(au) + \frac{1}{a^2} \ln \cos(au)$$

$$336) \int \sec^n(au) du = \frac{\sec^{n-2}(au) \tan(au)}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(au) du$$

Integrales con $\csc(au)$.

$$337) \int \csc(au) du = \frac{1}{a} \ln [\csc(au) - \cot(au)] = \frac{1}{a} \ln \left[\tan \frac{au}{2} \right]$$

$$338) \int \csc^2(au) du = -\frac{\cot(au)}{a}$$

$$339) \int \csc^3(au) du = -\frac{\csc(au) \cot(au)}{2a} + \frac{1}{2a} \ln \left[\tan \frac{au}{2} \right]$$

$$340) \int \csc^n(au) \cot(au) du = -\frac{\csc^n(au)}{na}$$

$$341) \int \frac{du}{\csc(au)} = -\frac{\cos(au)}{a}$$

$$342) \int u \csc^2(au) du = -\frac{u \cot(au)}{a} + \frac{1}{a^2} \ln [\sin(au)]$$

$$343) \int \csc^n(au) du = -\frac{\csc^{n-2}(au) \cot(au)}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2}(au) du$$

Integrales de Funciones Trigonométricas Inversas.

- 344) $\int \sin^{-1}(u/a) du = u \sin^{-1}(u/a) + \sqrt{a^2 - u^2}$
- 345) $\int u \sin^{-1}(u/a) du = \left(\frac{u^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \sin^{-1}(u/a) + \frac{u\sqrt{a^2 - u^2}}{4}$
- 346) $\int u^2 \sin^{-1}(u/a) du = \frac{u^3}{3} \sin^{-1}(u/a) + \frac{(u^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - u^2}}{9}$
- 347) $\int \frac{\sin^{-1}(u/a)}{u} du = \frac{u}{a} + \frac{(u/a)^3}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3(u/a)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5(u/a)^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} + \dots$
- 348) $\int \frac{\sin^{-1}(u/a)}{u^2} du = -\frac{\sin^{-1}(u/a)}{u} - \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right)$
- 349) $\int \left(\sin^{-1} \frac{u}{a} \right)^2 du = u \left(\sin^{-1} \frac{u}{a} \right)^2 - 2u + 2\sqrt{a^2 - u^2} \sin^{-1} \frac{u}{a}$
- 350) $\int \cos^{-1}(u/a) du = u \cos^{-1} \frac{u}{a} - \sqrt{a^2 - u^2}$
- 351) $\int u \cos^{-1}(u/a) du = \left(\frac{u^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \cos^{-1} \frac{u}{a} - \frac{u\sqrt{a^2 - u^2}}{4}$
- 352) $\int u^2 \cos^{-1}(u/a) du = \frac{u^3}{3} \cos^{-1} \frac{u}{a} - \frac{(u^2 - 2a^2)\sqrt{a^2 - u^2}}{9}$
- 353) $\int \frac{\cos^{-1}(u/a)}{u} du = \frac{\pi}{2} \ln(u) - \int \frac{\sin(u/a)}{u} du$
- 354) $\int \frac{\cos^{-1}(u/a)}{u^2} du = -\frac{\cos^{-1}(u/a)}{u} + \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right)$
- 355) $\int \left(\cos^{-1} \frac{u}{a} \right)^2 du = u \left(\cos^{-1} \frac{u}{a} \right)^2 - 2u - 2\sqrt{a^2 - u^2} \cos^{-1} \frac{u}{a}$
- 356) $\int \tan^{-1}(u/a) du = u \tan^{-1}(u/a) - \frac{a}{2} \ln(u^2 + a^2)$
- 357) $\int u \tan^{-1}(u/a) du = \frac{1}{2} (u^2 + a^2) \tan^{-1}(u/a) - \frac{au}{2}$
- 358) $\int u^2 \tan^{-1}(u/a) du = \frac{u^3}{3} \tan^{-1}(u/a) - \frac{au^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln(u^2 + a^2)$
- 359) $\int \frac{\tan^{-1}(u/a)}{u} du = (u/a) - \frac{(u/a)^3}{3^2} + \frac{(u/a)^5}{5^2} - \frac{(u/a)^7}{7^2} + \dots$
- 360) $\int \frac{\tan^{-1}(u/a)}{u^2} du = -\frac{1}{u} \tan^{-1}(u/a) - \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{u^2 + a^2}{u^2} \right)$
- 361) $\int \cot^{-1}(u/a) du = u \cot^{-1}(u/a) + \frac{a}{2} \ln(u^2 + a^2)$
- 362) $\int u \cot^{-1}(u/a) du = \frac{1}{2} (u^2 + a^2) \cot^{-1}(u/a) + \frac{au}{2}$
- 363) $\int u^2 \cot^{-1}(u/a) du = \frac{u^3}{3} \cot^{-1}(u/a) + \frac{au^2}{6} - \frac{a^3}{6} \ln(u^2 + a^2)$
- 364) $\int \frac{\cot^{-1}(u/a)}{u} du = \frac{\pi}{2} \ln u - \int \frac{\tan^{-1}(u/a)}{u} du$
- 365) $\int \frac{\cot^{-1}(u/a)}{u^2} du = -\frac{\cot^{-1}(u/a)}{u} + \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{u^2 + a^2}{u^2} \right)$
- 366) $\int u^m \sin^{-1}(u/a) du = \frac{u^{m+1}}{m+1} \sin^{-1}(u/a) - \frac{1}{m+1} \int \frac{u^{m+1}}{\sqrt{a^2 - u^2}} du$
- 367) $\int u^m \cos^{-1}(u/a) du = \frac{u^{m+1}}{m+1} \cos^{-1}(u/a) + \frac{1}{m+1} \int \frac{u^{m+1}}{\sqrt{a^2 - u^2}} du$
- 368) $\int u^m \tan^{-1}(u/a) du = \frac{u^{m+1}}{m+1} \tan^{-1}(u/a) - \frac{a}{m+1} \int \frac{u^{m+1}}{u^2 + a^2} du$
- 369) $\int u^m \cot^{-1}(u/a) du = \frac{u^{m+1}}{m+1} \cot^{-1}(u/a) + \frac{a}{m+1} \int \frac{u^{m+1}}{u^2 + a^2} du$

Integrales con e^{au} .

- 370) $\int e^{au} du = \frac{e^{au}}{a}$
- 371) $\int u e^{au} du = \frac{e^{au}}{a} \left(u - \frac{1}{a} \right)$
- 372) $\int u^2 e^{au} du = \frac{e^{au}}{a} \left(u^2 - \frac{2u}{a} + \frac{2}{a^2} \right)$
- 373) $\int u^n e^{au} du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} du$
 $= \frac{e^{au}}{a} \left(u^n - \frac{nu^{n-1}}{a} + \frac{n(n-1)u^{n-2}}{a^2} + \dots + \frac{(-1)^n n!}{a^n} \right)$
 con $n =$ entero positivo
- 374) $\int \frac{e^{au}}{u} du = \ln(u) + \frac{au}{1 \cdot 1!} + \frac{(au)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(au)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$
- 375) $\int \frac{e^{au}}{u^n} du = \frac{-e^{au}}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{e^{au}}{u^{n-1}} du$
- 376) $\int \frac{du}{p + qe^{au}} = \frac{u}{p} - \frac{1}{ap} \ln(p + qe^{au})$
- 377) $\int \frac{du}{(p + qe^{au})^2} = \frac{u}{p^2} + \frac{1}{ap(p + qe^{au})} - \frac{1}{ap^2} \ln|p + qe^{au}|$
- 378) $\int \frac{du}{pe^{au} + qe^{-au}} = \begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{pq}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{p}{q}} e^{au} \right) \\ \frac{1}{2a\sqrt{-pq}} \ln \left(\frac{e^{au} - \sqrt{-q/p}}{e^{au} + \sqrt{-q/p}} \right) \end{cases}$
- 379) $\int e^{au} \sin(bu) du = \frac{e^{au} [a \sin(bu) - b \cos(bu)]}{a^2 + b^2}$
- 380) $\int e^{au} \cos(bu) du = \frac{e^{au} [a \cos(bu) + b \sin(bu)]}{a^2 + b^2}$
- 381) $\int e^{au} \ln u du = \frac{e^{au} \ln u}{a} - \frac{1}{a} \int \frac{e^{au}}{u} du$

Integrales con $\ln(u)$.

- 382) $\int \ln(u) du = u \ln(u) - u$
- 383) $\int [\ln(u)]^2 du = u [\ln(u)]^2 - 2u \ln(u) + 2u$
- 384) $\int [\ln(u)]^n du = u [\ln(u)]^n - n \int [\ln(u)]^{n-1} du$
- 385) $\int u \ln(u) du = \frac{u^2}{2} \left[\ln(u) - \frac{1}{2} \right]$
- 386) $\int u^m \ln u du = \frac{u^{m+1}}{m+1} \left(\ln u - \frac{1}{m+1} \right)$
- 387) $\int \frac{\ln u}{u} du = \frac{1}{2} \ln^2 u$
- 388) $\int \frac{\ln u}{u^2} du = -\frac{\ln u}{u} - \frac{1}{u}$
- 389) $\int \ln^2 u du = u \ln^2 u - 2u \ln u + 2u$
- 390) $\int \frac{\ln^n u du}{u} = \frac{\ln^{n+1} u}{n+1}$
- 391) $\int \frac{du}{u \ln u} = \ln(\ln u)$
- 392) $\int \ln(u^2 + a^2) du = u \ln(u^2 + a^2) - 2u + 2a \arctan \frac{u}{a}$
- 393) $\int \ln(u^2 - a^2) du = u \ln(u^2 - a^2) - 2u + a \ln \left(\frac{u+a}{u-a} \right)$

Integrales con $\sinh(au)$.

- 394) $\int \sinh(au) du = \frac{\cosh(au)}{a}$
- 395) $\int u \sinh(au) du = \frac{u \cosh(au)}{a} - \frac{\sinh(au)}{a^2}$
- 396) $\int u^2 \sinh(au) du = \left(\frac{u^2}{a} + \frac{2}{a^3} \right) \cosh(au) - \frac{2u}{a^2} \sinh(au)$
- 397) $\int \frac{\sinh(au)}{u} du = au + \frac{(au)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(au)^5}{5 \cdot 5!} + \dots$
- 398) $\int \frac{\sinh(au)}{u^2} du = -\frac{\sinh(au)}{u} + a \int \frac{\cosh(au)}{u} du$
- 399) $\int \frac{du}{\sinh(au)} = \frac{1}{a} \ln \left[\tanh \left(\frac{au}{2} \right) \right]$
- 400) $\int \sinh^2(au) du = \frac{\sinh(au) \cosh(au)}{2a} - \frac{u}{2}$
- 401) $\int u \sinh^2(au) du = \frac{u \sinh(2au)}{4a} - \frac{\cosh(2au)}{8a^2} - \frac{u^2}{4}$
- 402) $\int \frac{du}{\sinh^2(au)} = -\frac{\coth(au)}{a}$
- 403) $\int \sinh(au) \sinh(pu) du = \frac{\sinh[(a+p)u]}{2(a+p)} - \frac{\sinh[(a-p)u]}{2(a-p)}$
- 404) $\int u^m \sinh(au) du = \frac{u^m \cosh(au)}{a} - \frac{m}{a} \int u^{m-1} \cosh(au) du$
- 405) $\int \sinh^n(au) du = \frac{\sinh^{n-1}(au) \cosh(au)}{an} - \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2}(au) du$
- 406) $\int \frac{\sinh(au)}{u^n} du = \frac{-\sinh(au)}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\cosh(au)}{u^{n-1}} du$
- 407) $\int \frac{du}{\sinh^n(au)} = \frac{-\cosh(au)}{a(n-1) \sinh^{n-1}(au)} - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{du}{\sinh^{n-2}(au)}$

Integrales con $\cosh(au)$.

- 408) $\int \cosh(au) du = \frac{\sinh(au)}{a}$
- 409) $\int u \cosh(au) du = \frac{u \sinh(au)}{a} - \frac{\cosh(au)}{a^2}$
- 410) $\int u^2 \cosh(au) du = -\frac{2u \cosh(au)}{a^2} + \left(\frac{u^2}{a} + \frac{2}{a^3} \right) \sinh(au)$
- 411) $\int \frac{\cosh(au)}{u} du = \ln u + \frac{(au)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(au)^4}{4 \cdot 4!} + \frac{(au)^6}{6 \cdot 6!} + \dots$
- 412) $\int \frac{\cosh(au)}{u^2} du = -\frac{\cosh(au)}{u} + a \int \frac{\sinh(au)}{u} du$
- 413) $\int \frac{du}{\cosh(au)} = \frac{2}{a} \tan^{-1} e^{au}$
- 414) $\int \cosh^2(au) du = \frac{u}{2} + \frac{\sinh(au) \cosh(au)}{2a}$
- 415) $\int u \cosh^2(au) du = \frac{u^2}{4} + \frac{u \sinh(2au)}{4a} - \frac{\cosh(2au)}{8a^2}$
- 416) $\int \frac{du}{\cosh^2(au)} = \frac{\tanh(au)}{a}$
- 417) $\int \cosh(au) \cosh(pu) du = \frac{\sinh[(a-p)u]}{2(a-p)} + \frac{\sinh[(a+p)u]}{2(a+p)}$
- 418) $\int u^m \cosh(au) du = \frac{u^m \sinh(au)}{a} - \frac{m}{a} \int u^{m-1} \sinh(au) du$
- 419) $\int \cosh^n(au) du = \frac{\cosh^{n-1}(au) \sinh(au)}{an} + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2}(au) du$
- 420) $\int \frac{\cosh(au)}{u^n} du = \frac{-\cosh(au)}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\sinh(au)}{u^{n-1}} du$
- 421) $\int \frac{du}{\cosh^n(au)} = \frac{\sinh(au)}{a(n-1) \cosh^{n-1}(au)} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{du}{\cosh^{n-2}(au)}$

Algunos valores de las funciones trigonométricas.							
A en grados	A en radianes	$\text{sen } A$	$\text{cos } A$	$\text{tan } A$	$\text{cot } A$	$\text{sec } A$	$\text{csc } A$
0°	0	0	1	0	∞	1	∞
15°	$\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$
30°	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45°	$\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
75°	$5\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$
90°	$\pi/2$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
105°	$7\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-(2 + \sqrt{3})$	$-(2 - \sqrt{3})$	$-(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$
120°	$2\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
135°	$3\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$5\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
165°	$11\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-(2 - \sqrt{3})$	$-(2 + \sqrt{3})$	$-(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$
180°	π	0	-1	0	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$
195°	$13\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$-(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
210°	$7\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
225°	$5\pi/4$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240°	$4\pi/3$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
255°	$17\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$	$-(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
270°	$3\pi/2$	-1	0	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	-1
285°	$19\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-(2 + \sqrt{3})$	$-(2 - \sqrt{3})$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	$-(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
300°	$5\pi/3$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
315°	$7\pi/4$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330°	$11\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
345°	$23\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-(2 - \sqrt{3})$	$-(2 + \sqrt{3})$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	$-(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
360°	2π	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$

Formulario de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias I.

Definición 1. Ecuación en Variables Separadas.

Consideremos la ecuación con forma estándar:

$$M(x) dx + N(y) dy = 0 \quad (1)$$

La solución se obtiene integrando directamente:

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C$$

Definición 2. Ecuación en Variables Separables.

Las siguientes dos ecuaciones, son ecuaciones en variables separables.

$$M_1(x)N_1(y) dx + M_2(x)N_2(y) dy = 0 \quad (2)$$

Para determinar la solución de la Ec.(2), se divide la ecuación entre: $M_2(x)N_1(y)$, para reducirla a la ecuación en variables separadas:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0$$

ahora sólo se integra directamente:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (3)$$

La solución de la Ec.(3), se obtiene al dividir entre $g(y)$ y multiplicar por dx , para reducirla a la ecuación en variables separadas:

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

ahora sólo se integra directamente:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C$$

Definición 3. Ecuación Lineal.

La ecuación lineal tiene la forma general:

$$a(x)y' + b(x)y = g(x) \quad (4)$$

$a(x)$, se llama **coeficiente principal**. La Ec.(4) se tiene que dividir entre $a(x)$ para obtener la **forma estándar**:

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (5)$$

La Ec.(5) tiene a 1 como coeficiente principal y a partir de aquí se obtiene la solución de la Ec.(4), LA SOLUCIÓN ES:

$$y(x) = e^{-\int P(x) dx} \left[\int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx + C \right]$$

Si $Q(x) = 0$, la solución es:

$$y(x) = Ce^{-\int P(x) dx}$$

El termino $e^{\int P(x) dx}$ se llama *Factor Integrante* de la ecuación.

Definición 4. Ecuación de Bernoulli.

Tiene la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (6)$$

con $n \neq 0$ y $n \neq 1$, n puede ser positivo o negativo. Con el cambio de variable $z = y^{-n+1}$, la ecuación de Bernoulli se reduce a la ecuación lineal:

$$z' + (-n+1)P(x)z = (-n+1)Q(x) \quad (7)$$

al resolver la Ec.(7), se obtiene que LA SOLUCIÓN DE LA EC.(6) DE BERNOULLI ES:

$$y^{-n+1} = e^{-\int (-n+1)P(x) dx} \left[(-n+1) \int e^{\int (-n+1)P(x) dx} Q(x) dx + C \right]$$

Definición 5. Ecuaciones Exactas o en Diferenciales Totales.

Consideramos la ecuación:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (8)$$

donde se cumple: $M_y = N_x$. La solución se obtiene de calcular:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & u = \int M(x, y) dx, \\ \text{ii)} & \text{calculamos: } u_y \\ \text{iii)} & v = \int [N(x, y) - u_y] dy \\ \text{iv)} & \text{La solución general implícita es: } u + v = C \end{array}$$

Definición 6. Factor Integrante.

Consideremos la ecuación:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (9)$$

donde $M_y \neq N_x$. Para determinar la solución de esta ecuación, se tiene que reducir a una ecuación exacta; así que **primero** se debe calcular uno de los dos posibles factores integrantes:

$$1) \mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} \quad 2) \mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$$

segundo se multiplica la Ec.(9) por el factor integrante que exista y se obtiene la ecuación exacta:

$$\mu M(x, y) dx + \mu N(x, y) dy = 0 \quad (10)$$

la solución de la Ec.(10), que ya se sabe resolver, es la solución de la Ec.(9).

Definición 7. Función Homogénea.

Se dice que una función $f(x, y)$ es una “función homogénea de grado n ” respecto a las variables x e y , si para cualquier valor real λ se cumple la propiedad:

$$f(x\lambda, y\lambda) = \lambda^n f(x, y)$$

donde $n \in \mathbb{R}$. En particular, cuando $n = 0$ se tiene una *función homogénea de grado cero*, se cumple que:

$$f(x\lambda, y\lambda) = f(x, y)$$

Definición 8. Ecuaciones Homogéneas de Grado Cero.

Consideremos las ecuaciones:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (11)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (12)$$

Se dice que la Ec.(11) es homogénea de grado cero, si tanto $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas del mismo grado. La Ec.(12) será homogénea si $f(x, y)$ es una función homogénea de grado cero. Las Ecs.(11) y (12) se transforman en ecuaciones en variables separadas al utilizar los cambios de variables: $u = \frac{y}{x}$ y $v = \frac{x}{y}$. Si N es algebraicamente más sencilla que M , se elige $u = \frac{y}{x}$. Si M es algebraicamente más sencilla que N , se elige $v = \frac{x}{y}$.

A) Con el cambio de variable $u = \frac{y}{x}$.

 **La Ec.(11)** se reduce a la ecuación en variables separadas:

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, u)}{M(1, u) + uN(1, u)} du = 0 \quad \text{la cual se integra directamente} \quad \int \frac{dx}{x} + \int \frac{N(1, u)}{M(1, u) + uN(1, u)} du = C$$

la solución de la Ec.(11) se obtiene al sustituir nuevamente u por $\frac{y}{x}$ en el resultado de la integral.

 **La Ec.(12)** se reduce a la ecuación en variables separadas:

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x} \quad \text{la cual se integra directamente} \quad \int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

la solución de la Ec.(12) se obtiene al sustituir nuevamente u por $\frac{y}{x}$ en el resultado de la integral.

B) Con el cambio de variable $v = \frac{x}{y}$.

✎ La Ec.(11) se reduce a la ecuación en variables separadas:

$$\frac{dy}{y} + \frac{M(v, 1)}{N(v, 1) + vM(v, 1)} dv = 0 \quad \text{la cual se integra directamente} \quad \int \frac{dy}{y} + \int \frac{M(v, 1)}{N(v, 1) + vM(v, 1)} dv = C$$

la solución de la Ec.(11) se obtiene al sustituir nuevamente v por $\frac{x}{y}$ en el resultado de la integral.

✎ La Ec.(12) se reduce a la ecuación en variables separadas:

$$\frac{dv}{\frac{1}{f(v, 1)} - v} = \frac{dy}{y} \quad \text{la cual se integra directamente} \quad \int \frac{dv}{\frac{1}{f(v, 1)} - v} = \int \frac{dy}{y} + C$$

la solución de la Ec.(12) se obtiene al sustituir nuevamente v por $\frac{x}{y}$ en el resultado de la integral.

I. WRONSKIANO.

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Renglón de las funciones.} \\ \text{Primera derivada de las funciones.} \\ \text{Segunda derivada de las funciones.} \\ \vdots \\ \text{Derivada de orden } n-1 \text{ de las funciones.} \end{array}$$

• Si el $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$, entonces, el conjunto de funciones $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ es linealmente independiente (LI).

(1) CÁLCULO DE $y_h(x)$. **Ecuación Auxiliar.**

Primero. Dada la ecuación:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x) \quad (13)$$

establecer la ecuación homogénea asociada:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (14)$$

Segundo. Establecer la *ecuación auxiliar*:

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0 \quad (15)$$

la Ec.(15) es un polinomio de grado n , en la variable m . Al resolver este polinomio se pueden tener:

- | | |
|------------------------------|---|
| ★ raíces reales y diferentes | ★ raíces conjugadas complejas, y |
| ★ raíces reales repetidas | ★ raíces conjugadas complejas repetidas |

Por esta razón $y_h(x)$ consta de cuatro partes: $y_h(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x)$, ¡¡ no necesariamente existen los cuatro casos !!

Caso i. Raíces Reales y Diferentes, $y_1(x)$.

Sean $m_1, m_2, m_3, \dots$ las raíces reales y diferentes de (15), entonces, una parte de $y_h(x)$ se escribe como:

$$y_1(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} + \cdots \quad (16)$$

Caso ii. Raíces Reales Repetidas, $y_2(x)$.

Sean $m = m_1 = m_2 = m_3 = m_4 \cdots$ las raíces reales repetidas de (15), entonces, otra parte de $y_h(x)$ se escribe como:

$$y_2(x) = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx} + C_3 x^2 e^{mx} + C_4 x^3 e^{mx} + \cdots \quad (17)$$

Caso iii. Raíces Conjugadas Complejas, $y_3(x)$.

Sean $m_1 = \alpha_1 \pm \beta_1 i$, $m_2 = \alpha_2 \pm \beta_2 i$, $m_3 = \alpha_3 \pm \beta_3 i, \dots$ las raíces complejas conjugadas de (15), entonces, otra parte de $y_h(x)$ se escribe como:

$$y_3(x) = e^{\alpha_1 x} [C_1 \cos(\beta_1 x) + C_2 \sin(\beta_1 x)] + e^{\alpha_2 x} [C_3 \cos(\beta_2 x) + C_4 \sin(\beta_2 x)] + e^{\alpha_3 x} [C_5 \cos(\beta_3 x) + C_6 \sin(\beta_3 x)] + \dots \quad (18)$$

Nota: Obsérvese que se toma el valor positivo de β en todos los casos.

Caso iv. Raíces Conjugadas Complejas Repetidas, $y_4(x)$.

Sean $m_1 = \alpha \pm \beta i = m_2 = \alpha \pm \beta i = m_3 = \alpha \pm \beta i = \dots$ las raíces conjugadas complejas repetidas de (15), entonces, otra parte de $y_h(x)$ se escribe como:

$$y_4(x) = e^{\alpha x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] + x e^{\alpha x} [C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x)] + x^2 e^{\alpha x} [C_5 \cos(\beta x) + C_6 \sin(\beta x)] + \dots \quad (19)$$

Nota: Obsérvese que se toma el valor positivo de β en todos los casos.

• **CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUCIONES (CFS).** Sean $y_1, y_2, \dots, y_n$, n soluciones LI de la Ec.(14). Entonces el conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ se llama *Conjunto Fundamental de Soluciones* para la Ec.(14).

(2) CÁLCULO DE SOLUCIONES PARTICULARES $y_p(x)$ PARA LA EC.(13).

Primer Método: Coeficientes Indeterminados.

La solución $y_p(x)$ depende de la forma que tiene $g(x)$. Por esta razón se utiliza la siguiente tabla:

si $g(x)$ es	entonces $y_p(x)$ se propone como
$k - cte$	A
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0$
$\cos(ax)$	$A \cos(ax) + B \sin(ax)$
$\sin(ax)$	$A \cos(ax) + B \sin(ax)$
e^{ax}	$A e^{ax}$

Si $g(x)$ es una multiplicación de las anteriores formas, $y_p(x)$ se propone como una multiplicación de las respectivas $y_p(x)$.

Una vez propuesta $y_p(x)$, se debe calcular la solución general homogénea $y_h(x)$ y verificar que los términos de $y_p(x)$ no aparezcan en $y_h(x)$; pero si algún término de $y_p(x)$ aparecen en $y_h(x)$, entonces, se deberá multiplicar dicho término por x o x^2 o $x^3 \dots$ o por alguna potencia x^n , hasta que dicho término de la solución particular $y_p(x)$ no aparezca en la solución $y_h(x)$. Después $y_p(x)$ debe derivarse según las derivadas que aparecen en la Ec.(13); ya calculadas las derivadas, se sustituyen en la Ec.(13) para comparar coeficientes y determinar sus respectivos valores.

Segundo Método: Variación de Parámetros.

Cuando el término independiente $g(x)$ no tiene la forma de alguno de los de la tabla de coeficientes indeterminados, es cuando se utiliza *variación de parámetros*.

Se debe determinar el conjunto fundamental de soluciones (CFS) de la ecuación homogénea asociada (14). En general, una manera de determinar un CFS para la Ec.(14), es a partir de la solución general homogénea $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) + \dots + C_k y_k(x)$, el CFS es:

$$\{y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_k(x)\}$$

Primero. Sólo se trabajará con EDO-LOS de segundo y tercer orden. Entonces se deben determinar los conjuntos fundamentales de soluciones $\{y_1(x), y_2(x)\}$ o $\{y_1(x), y_2(x), y_3(x)\}$, según se trate de una EDO de segundo o tercer orden respectivamente.

Segundo.

Caso i. Ecuación de segundo orden.

La solución particular tiene la forma:

$$y_p(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

donde:

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{-g(x)y_2}{W[y_1, y_2]}, & u_1 &= \int \frac{-g(x)y_2}{W[y_1, y_2]} dx \\ u_2' &= \frac{g(x)y_1}{W[y_1, y_2]}, & u_2 &= \int \frac{g(x)y_1}{W[y_1, y_2]} dx \end{aligned}$$

Caso ii. Ecuación de tercer orden.

La solución particular tiene la forma:

$$y_p(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3$$

donde:

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{g(x)[y_2 y_3' - y_3 y_2']}{W[y_1, y_2, y_3]}, & u_1 &= \int \frac{g(x)[y_2 y_3' - y_3 y_2']}{W[y_1, y_2, y_3]} dx \\ u_2' &= \frac{g(x)[-y_1 y_3' + y_3 y_1']}{W[y_1, y_2, y_3]}, & u_2 &= \int \frac{g(x)[-y_1 y_3' + y_3 y_1']}{W[y_1, y_2, y_3]} dx \\ u_3' &= \frac{g(x)[y_1 y_2' - y_2 y_1']}{W[y_1, y_2, y_3]}, & u_3 &= \int \frac{g(x)[y_1 y_2' - y_2 y_1']}{W[y_1, y_2, y_3]} dx \end{aligned}$$

Finalmente la solución general de la Ec.(13) se obtiene de sumar $y_h(x)$ y las $y_p(x)$ obtenidas por coeficientes indeterminados y/o por variación de parámetros.

II. Transformada de Laplace $\mathcal{L}$.

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ existe si $f(t)$ es seccionalmente (por tramos) continua en $[0, \infty)$ y es de orden exponencial.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

una vez calculada la integral, representamos por $F(s)$ a $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Y en general: $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, $\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s), \dots$

Propiedades de la Transformada de Laplace.

- La transformada de Laplace es lineal porque:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{kf(t)\} &= k\mathcal{L}\{f(t)\} \\ \mathcal{L}\{k_1 f(t) \pm k_2 g(t)\} &= k_1 \mathcal{L}\{f(t)\} \pm k_2 \mathcal{L}\{g(t)\} \end{aligned}$$

donde: k , k_1 y k_2 son constantes.

- Transformada de una Derivada.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y\} &= Y(s) \\ \mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0) \\ \mathcal{L}\{y''\} &= s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) \\ \mathcal{L}\{y'''\} &= s^3 Y(s) - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0) \\ &\vdots \\ \mathcal{L}\{y^{(n)}\} &= s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \dots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

- Primer Teorema de Traslación o de Desplazamiento:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

Primero identificamos el valor de a y se calcula $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Segundo se calcula $F(s)|_{s=s-a}$, y así se cumple que $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$.

- Función Escalón Unitario o de Heaviside, denotada como $\mathcal{U}(t-a)$ o $H(t-a)$.

$$H(t-a) = \mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a; \\ 1, & t \geq a. \end{cases}$$

- Función por partes en términos la función escalón unitario. Sea

$$f(t) = \begin{cases} f_1 & 0 \leq t \leq a \\ f_2 & a \leq t < b \\ f_3 & b \leq t < c \\ f_4 & t \geq c \end{cases}$$

entonces: $f(t) = f_1\mathcal{U}(t) + [f_2 - f_1]\mathcal{U}(t-a) + [f_3 - f_2]\mathcal{U}(t-b) + [f_4 - f_3]\mathcal{U}(t-c)$

- Segundo Teorema de Traslación:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

Forma alternativa del segundo teorema de traslación:

$$\mathcal{L}\{f(t)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{f(t)|_{t=t+a}\right\}$$

Trabajando con la forma alternativa: Primero se identifica el valor de a y $f(t)$. Segundo, se calcula $f(t)|_{t=t+a}$.

Tercero se calcula $\mathcal{L}\left\{f(t)|_{t=t+a}\right\}$. Finalmente multiplicamos este último resultado por e^{-as} y así se tiene que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{f(t)|_{t=t+a}\right\}$$

III. Transformada Inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}$.

Sea $F(s)$ la transformada de Laplace de alguna función $f(t)$. Entonces, se dice que $f(t)$ es la *transformada inversa de Laplace* de $F(s)$, y se denota con $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

- La Transformada Inversa de Laplace es Lineal porque:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{kF(s)\} &= k\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \\ \mathcal{L}^{-1}\{k_1F(s) \pm k_2G(s)\} &= k_1\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \pm k_2\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \end{aligned}$$

donde: k , k_1 y k_2 son constantes.

Propiedades de la Transformada Inversa de Laplace.

- Forma Inversa del Primer Teorema de Traslación.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$$

- Forma Inversa del Segundo Teorema de Traslación.

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t)|_{t=t-a}\mathcal{U}(t-a)$$

Primero identificar el valor de a y $F(s)$. Segundo calcular $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$. Tercero evaluar $f(t)|_{t=t-a}$ y así se tiene que $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t)|_{t=t-a}\mathcal{U}(t-a)$.

..... Transformadas de Laplace, práctico para la transformada de Laplace

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$k = cte$	$\frac{k}{s}$	$\cosh^2(kt)$	$\frac{s^2 - 2k^2}{s(s^2 - 4k^2)}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$t \operatorname{sen}(kt)$	$\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$
$t^n \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t \cos(kt)$	$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$
$t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	$t \operatorname{senh}(kt)$	$\frac{2ks}{(s^2 - k^2)^2}$
$t^{1/2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$	$t \cosh(kt)$	$\frac{s^2 + k^2}{(s^2 - k^2)^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	$e^{at} \operatorname{sen}(kt)$	$\frac{k}{(s - a)^2 + k^2}$
$t^n e^{at} \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	$e^{at} \operatorname{senh}(kt)$	$\frac{k}{(s - a)^2 - k^2}$
$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$\ln \frac{s - a}{s - b}$	$e^{at} \cos(kt)$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2}$
$\operatorname{sen}(kt)$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$	$e^{at} \operatorname{senh}(kt)$	$\frac{k}{(s - a)^2 - k^2}$
$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$	$e^{at} \cosh(kt)$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 - k^2}$
$\operatorname{sen}^2(kt)$	$\frac{2k^2}{s(s^2 + 4k^2)}$	$\operatorname{sen}(kt) \operatorname{senh}(kt)$	$\frac{2k^2 s}{s^4 + 4k^4}$
$\cos^2(kt)$	$\frac{s^2 + 2k^2}{s(s^2 + 4k^2)}$	$\operatorname{sen}(kt) \cosh(kt)$	$\frac{k(s^2 + 2k^2)}{s^4 + 4k^4}$
$\operatorname{senh}(kt)$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$	$\cos(kt) \operatorname{senh}(kt)$	$\frac{k(s^2 - 2k^2)}{s^4 + 4k^4}$
$\cosh(kt)$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$	$\cos(kt) \cosh(kt)$	$\frac{s^3}{s^4 + 4k^4}$
$\operatorname{senh}^2(kt)$	$\frac{2k^2}{s(s^2 - 4k^2)}$	$1 - \cos(kt)$	$\frac{k^2}{s(s^2 + k^2)}$
		$kt - \operatorname{sen}(kt)$	$\frac{k^3}{s^2(s^2 + k^2)}$

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$\text{sen}(kt) + kt \cos(kt)$	$\frac{2ks^2}{(s^2 + k^2)^2}$	$\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{s}$
$\text{sen}(kt) - kt \cos(kt)$	$\frac{2k^3}{(s^2 + k^2)^2}$	$\mathcal{U}(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\frac{\text{sen}(at)}{t}$	$\arctan\left(\frac{a}{s}\right)$	$g(t)\mathcal{U}(t)$	$\mathcal{L}\{g(t)\}$
$\frac{2(1 - \cos(kt))}{t}$	$\ln \frac{s^2 + k^2}{s^2}$	$g(t)\mathcal{U}(t - a)$	$e^{-as} \mathcal{L}\{g(t) _{t=t+a}\}$
$\frac{2(1 - \cosh(kt))}{t}$	$\ln \frac{s^2 - k^2}{s^2}$	$t\mathcal{U}(t - a)$	$\left(\frac{a}{s} + \frac{1}{s^2}\right) e^{-as}$
$\frac{a \text{sen}(bt) - b \text{sen}(at)}{ab(a^2 - b^2)}$	$\frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$t^2\mathcal{U}(t - a)$	$\left(\frac{a^2}{s} + \frac{2a}{s^2} + \frac{2}{s^3}\right) e^{-as}$
$\frac{\cos(bt) - \cos(at)}{(a^2 - b^2)}$	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$t^3\mathcal{U}(t - a)$	$\left(\frac{a^3}{s} + \frac{3a^2}{s^2} + \frac{6a}{s^3} + \frac{6}{s^4}\right) e^{-as}$
$\frac{\text{sen}(at) \cos(at)}{t}$	$\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{a+b}{s}\right) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{a-b}{s}\right)$	$e^{kt}\mathcal{U}(t - a)$	$\frac{e^{-as+ak}}{s - k}$
$e^{at}f(t)$	$F(s - a)$	$\text{sen}(kt)\mathcal{U}(t - a)$	$\frac{k \cos(ka) + s \text{sen}(ka)}{s^2 + k^2} e^{-as}$
		$\cos(kt)\mathcal{U}(t - a)$	$\frac{s \cos(ka) - k \text{sen}(ka)}{s^2 + k^2} e^{-as}$

..... Transformadas de Laplace, práctico para la transformada inversa de Laplace

$f(s)$	$F(t)$	$f(s)$	$F(t)$
$\frac{k}{s}$	$k \quad \text{con } k = \text{constante}$	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{\text{sen}(at)}{a}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{1}{(s-b)^2 + a^2}$	$\frac{e^{bt} \text{sen}(at)}{a}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	$\frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \cos(at)$
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{\text{senh}(at)}{a}$

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{1}{(s - b)^2 - a^2}$	$\frac{e^{bt} \sinh(at)}{a}$
$\frac{s - b}{(s - b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \cosh(at)$
$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{b - a} \quad \text{con } a \neq b$
$\frac{s}{(s - a)(s - b)}$	$\frac{be^{bt} - ae^{at}}{b - a} \quad \text{con } a \neq b$
$\frac{1}{(s - a)(s - b)(s - c)}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{e^{at}}{(a - b)(a - c)} + \\ + \frac{e^{bt}}{(a - b)(c - b)} + \\ + \frac{e^{ct}}{(a - c)(b - c)} \end{array} \right.$
$\frac{s}{(s - a)(s - b)(s - c)}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ae^{at}}{(a - b)(a - c)} + \\ + \frac{be^{bt}}{(a - b)(c - b)} + \\ + \frac{ce^{ct}}{(a - c)(b - c)} \end{array} \right.$
$\frac{s^2}{(s - a)(s - b)(s - c)}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2 e^{at}}{(a - b)(a - c)} + \\ + \frac{b^2 e^{bt}}{(a - b)(c - b)} + \\ + \frac{c^2 e^{ct}}{(a - c)(b - c)} \end{array} \right.$
$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sen(at) - at \cos(at)}{2a^3}$
$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t \sen(at)}{2a}$
$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sen(at) + at \cos(at)}{2a}$
$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2}$	$\cos(at) - \frac{1}{2}at \sen(at)$
$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cos(at)$

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{1}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{at \cosh(at) - \sinh(at)}{2a^3}$
$\frac{s}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{t \sinh(at)}{2a}$
$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{\sinh(at) + at \cosh(at)}{2a}$
$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)^2}$	$\cosh(at) + \frac{1}{2}at \sinh(at)$
$\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$t \cosh(at)$
$\frac{1}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{(3 - a^2 t^2) \sen(at) - 3at \cos(at)}{8a^5}$
$\frac{s}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{t \sen(at) - at^2 \cos(at)}{8a^3}$
$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{(1 + a^2 t^2) \sen(at) - at \cos(at)}{8a^3}$
$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{3t \sen(at) + at^2 \cos(at)}{8a}$
$\frac{s^4}{(s^2 + a^2)a^3}$	$\frac{(3 - a^2 t^2) \sen(at) + 5at \cos(at)}{8a}$
$\frac{s^5}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{(8 - a^2 t^2) \cos(at) - 7at \sen(at)}{8}$
$\frac{3s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{t^2 \sen(at)}{2a}$
$\frac{s^3 - 3a^2 s}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2 \cos(at)$
$\frac{s^4 - 6a^2 s + a^4}{(s^2 + a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3 \cos(at)$
$\frac{s^3 - a^2 s}{(s^2 + a^2)^4}$	$\frac{t^3 \sen(at)}{24a}$
$\frac{1}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{(3 + a^2 t^2) \sinh(at) - 3at \cosh(at)}{8a^5}$
$\frac{s}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{at^2 \cosh(at) - t \sinh(at)}{8a^3}$

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{at \cosh(at) + (a^2 t^2 - 1) \sinh(at)}{8a^3}$
$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{3t \sinh(at) + at^2 \cosh(at)}{8a}$
$\frac{s^4}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{(3 + a^2 t^2) \sinh(at) + 5at \cosh(at)}{8a}$
$\frac{s^5}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{(8 + a^2 t^2) \cosh(at) + 7at \sinh(at)}{8}$
$\frac{3s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{t^2 \sinh(at)}{2a}$
$\frac{s^3 + 3a^2 s}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 \cosh(at)$
$\frac{s^4 + 6a^2 s + a^4}{(s^2 - a^2)^4}$	$\frac{1}{6} t^3 \cosh(at)$
$\frac{s^3 + a^2 s}{(s^2 - a^2)^4}$	$\frac{t^3 \sinh(at)}{24a}$
$\frac{1}{s^3 + a^3}$	$\frac{e^{at/2}}{3a^2} \left(\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}at}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} + e^{-3at/2} \right)$
$\frac{s}{s^3 + a^3}$	$\frac{e^{at/2}}{3a} \left(\cos \frac{\sqrt{3}at}{2} + \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}at}{2} - e^{-3at/2} \right)$
$\frac{s^2}{s^3 + a^3}$	$\frac{1}{3} \left(e^{-at} + 2e^{at/2} \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} \right)$
$\frac{1}{s^3 - a^3}$	$\frac{e^{-at/2}}{3a^2} \left(e^{3at/2} - \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} - \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}at}{2} \right)$
$\frac{s}{s^3 - a^3}$	$\frac{e^{-at/2}}{3a} \left(\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}at}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} + e^{3at/2} \right)$
$\frac{s^2}{s^3 - a^3}$	$\frac{1}{3} \left(e^{at} + 2e^{-at/2} \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} \right)$
$\frac{1}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{1}{4a^3} \left(\operatorname{sen}(at) \cosh(at) - \cos(at) \sinh(at) \right)$
$\frac{s}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{\operatorname{sen}(at) \sinh(at)}{2a^2}$
$\frac{s^2}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{1}{2a} \left(\operatorname{sen}(at) \cosh(at) + \cos(at) \sinh(at) \right)$

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{s^3}{s^4 + 4a^4}$	$\cos(at) \cosh(at)$
$\frac{1}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^3} \left(\sinh(at) - \operatorname{sen}(at) \right)$
$\frac{s}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^2} \left(\cosh(at) - \cos(at) \right)$
$\frac{s^2}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a} \left(\sinh(at) + \operatorname{sen}(at) \right)$
$\frac{s^3}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2} \left(\cosh(at) + \cos(at) \right)$
$\frac{1}{\sqrt{s+a} + \sqrt{s+b}}$	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$
$\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\frac{\operatorname{fer}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
$\frac{1}{\sqrt{s}(s-a)}$	$\frac{e^{at} \operatorname{fer}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
$\frac{1}{\sqrt{s-a}+b}$	$e^{at} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - b e^{b^2 t} \operatorname{fcer}(b\sqrt{t}) \right)$
$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$J_0(at)$
$\frac{1}{\sqrt{s^2 - a^2}}$	$I_0(at)$
e^{-as}	$\delta(t-a)$
$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$	$t^n f(t)$
$F(s-a)$	$e^{at} f(t)$
$\frac{1}{s}$	$\mathcal{U}(t)$
$\frac{e^{-as}}{s}$	$\mathcal{U}(t-a)$
$e^{-as} F(s)$	$f(t-a) \mathcal{U}(t-a)$